



گزینه ۴

۱

تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{a-3x} + 5$ در صورتی ثابت است که دامنه آن محدود به یک نقطه باشد:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$a-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{a}{3}$$

اگر $\frac{a}{3} = 1$ یعنی $a = 3$ باشد، دامنه f فقط شامل $x = 1$ خواهد بود و $f = \{(1, 5)\}$ می‌شود.
پس تابع $f + g$ فقط به ازای $x = 1$ تعریف شده است:

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 5 + (1) = 6$$

توجه کنید چون g تابع همانی است، داریم: $g(x) = x$.

گزینه ۳

۲

برای راحتی فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^y - \frac{1}{x^y} = A \\ x^y + \frac{1}{x^y} = B \end{cases}$$

پس به $f(A) = B$ می‌رسیم. ابتدا سعی می‌کنیم A و B را به هم نزدیک کنیم. برای این منظور آن‌ها را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^y - \frac{1}{x^y} = A \Rightarrow (x^y - \frac{1}{x^y})^2 = A^2 \Rightarrow x^F + \frac{1}{x^F} - 2 = A^2 \quad (1)$$

$$x^y + \frac{1}{x^y} = B \Rightarrow (x^y + \frac{1}{x^y})^2 = B^2 \Rightarrow x^F + \frac{1}{x^F} + 2 = B^2 \quad (2)$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$x^F + \frac{1}{x^F} = A^2 + 2$$

با جایگذاری در (۲) داریم:

$$\underbrace{x^F + \frac{1}{x^F}}_{A^2 + 2} + 2 = B^2 \Rightarrow B^2 = A^2 + 4$$

$$\Rightarrow B = \pm \sqrt{A^2 + 4}$$

از آنجاکه $B = x^y + \frac{1}{x^y}$ ، بنابراین B همواره مثبت است و فقط $B = \sqrt{A^2 + 4}$ قابل قبول می‌باشد. پس:

$$f(A) = B \Rightarrow f(A) = \sqrt{A^2 + 4}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ درواقع}$$

$$f(2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$f(2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} f(2 - \sqrt{3}) + f(2 + \sqrt{3}) &= 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 4 - \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

در عبارت $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ مخرج مشترک می‌گیریم، مخرج‌ها مزدوج یکدیگر هستند:

$$4 - \left(\frac{(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})}{4 - 3} \right) = 4 - 4 = 0$$

$$\left[\frac{x}{2} \right] = -2 \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \xrightarrow{\times 2} -4 \leq x < -2$$

برای به دست آوردن جزء صحیح $\left[-\frac{1}{2}x - 1 \right]$ داریم:

$$-4 \leq x < -2 \xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})} 1 < -\frac{1}{2}x \leq 2$$

چون نامساوی در یک عدد منفی ضرب می‌شود جهت نامساوی عوض می‌شود

$$\xrightarrow{+(-1)} 1 - 1 < -\frac{1}{2}x - 1 \leq 2 - 1$$

$$\Rightarrow 0 < -\frac{1}{2}x - 1 \leq 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}x - 1 \right] = 0 \text{ یا } 1$$

به عبارت دیگر بین ۱ و صفر، جزء صحیح عبارت صفر می‌شود، چون در ۱ مساوی دارد، خود ۱ نیز شامل می‌شود.

$$D_f = \{-1, 1, -2, 3\}, \quad D_g = \{1, -2, 3\}, \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = \{1, -2, 3\}$$

پس مؤلفه‌های اول تابع $f \times g$ برابر ۳ و -۲ و ۱ می‌باشد.

برای به دست آوردن مؤلفه‌های دوم تابع $f \times g$ باید به ازای ۳، -۲، ۱ را به دست آوریم:

$$x = 1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} (1, 2) : f &\Rightarrow f(1) = 2 \\ (1, 1) : g &\Rightarrow g(1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \times g)(1) = 2 \times 1 = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} (-2, 3) : f &\Rightarrow f(-2) = 3 \\ (-2, -3) : g &\Rightarrow g(-2) = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \times g)(-2) = 3 \times (-3) = -9$$

$$x = 3 \Rightarrow \left. \begin{aligned} (3, 4) : f &\Rightarrow f(3) = 4 \\ (3, -1) : g &\Rightarrow g(3) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \times g)(3) = 4 \times (-1) = -4$$

$$\Rightarrow f \times g = \{(1, 2), (3, -4), (-2, -9)\}$$

$$f(x) = x + a \Rightarrow f^{-1}(x) = x - a$$

فاصله f و f^{-1} در واقع فاصله دو خط موازی $\begin{cases} y - x = a \\ y - x = -a \end{cases}$ است.

$$\frac{|a - (-a)|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |2a| = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

باتوجه به نمودار، ضابطه تابع پلکانی به صورت زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} -۲ & ; -۲ < x \leq -۱ \\ -۱ & ; -۱ < x \leq ۱ \\ +۱ & ; ۱ < x \leq ۲ \end{cases}$$

پس داریم:

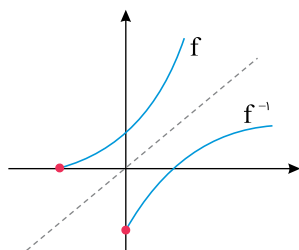
$$\begin{cases} (m - \omega) = 0 \Rightarrow m = \omega (*) \\ \frac{2n - 1}{m} = -1 \xrightarrow{(*)} \frac{2n - 1}{\omega} = -1 \Rightarrow 2n = -\omega + 1 = -۴ \Rightarrow n = -۲ \\ k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m - n)k = (\omega - (-۲)) \times 1 = ۷$$

اگر $[x] = k$ باشد، آنگاه $k \leq x < k + 1$ می باشد:

$$[x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۲ + 1 \Rightarrow ۲ \leq x < ۳$$

چون نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگر هستند، پس داریم:



توابع $f + ۲$ و $f^۲$ را تشکیل می دهیم:

$$f + ۲ = \{(0, 1), (-1, ۲), (1, ۳), (۲, ۴)\}$$

$$f^۲ = \{(0, 1), (-1, 0), (1, 1), (۲, ۴)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f + ۲}{f^۲} = \{(0, 1), (1, ۳), (۲, 1)\}$$

بنابراین برد $\frac{f + ۲}{f^۲}$ شامل دو عضو ۱ و ۳ است.

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x); D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = \{0, -2\}$$

$$D_f = \{-3, 0, m - n\}, D_g = \{0, -2, 3\} \Rightarrow m - n = -2$$

همچنین داریم:

$$(f \times g)(0) = f(0) \times g(0) = -8 \Rightarrow 2 \times (m + n) = -8$$

$$\Rightarrow m + n = -4$$

$$\begin{cases} m - n = -2 \\ m + n = -4 \end{cases} \Rightarrow m = -3, n = -1 \Rightarrow \frac{m}{n} = 3$$

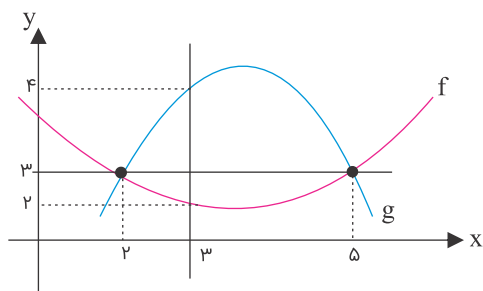
دو تابع f و g را مساوی می‌نامیم هرگاه دامنه‌هایشان باهم برابر باشد و در هر نقطه از این دامنه مشترک، ضابطه‌هایشان یکسان باشد. دامنه هر دو تابع مساوی و برابر $\mathbb{R}$ است. همچنین:

$$f(2) = g(2) = (2+1)^2 + 3 = 9 + 3 = 12 = a$$

$$y = \sqrt{x - \frac{12}{4}} + 12 = \sqrt{x - 3} + 12$$

برای رسم نمودار باید تابع $\sqrt{x}$ را ۳ واحد در راستای افقی به سمت راست و ۱۲ واحد در راستای عمودی به سمت بالا منتقل کنیم. بنابراین نمودار گزینه "۱" صحیح است.

شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



تفاضل دو سهمی باز هم یک سهمی خواهد بود:

$$h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

فرض کنید

$$\begin{cases} h(2) = f(2) - g(2) = 3 - 3 = 0 \\ h(5) = f(5) - g(5) = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = a(x-2)(x-5) \quad (1)$$

ازطرفی:

$$h(3) = f(3) - g(3) = 2 - 4 = -2 \xrightarrow{(1)} a(1)(-2) = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow h(x) = (x-2)(x-5) \Rightarrow h(-1) = 18 \Rightarrow (f-g)(-1) = 18$$

اگر طول رأس سهمی در بازه داده شده قرار بگیرد، تابع در این بازه یک به یک نمی شود.

بنابراین $x_S = \frac{-(-2)}{2m} = \frac{1}{m}$ به جز در بازه $(-3, 2)$ هر مقدار حقیقی دیگری می تواند اختیار کند، پس:

$$-3 < \frac{1}{m} < 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} < 2 \Rightarrow m > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{m} > -3 \Rightarrow m < \frac{-1}{3} \end{cases}$$

در نتیجه در صورتی که $m \in (\frac{-1}{3}, \frac{1}{2})$ باشد، تابع g یک به یک است.

$$\frac{(f - 2g)(2)}{f(2 - \sqrt{5})} = \frac{f(2) - 2g(2)}{2[2 - \sqrt{5}]} = \frac{|2 + 3| - 2(2)}{2(-1)} = \frac{1}{-2}$$

اگر $x > 0$ باشد، $4 < x < 5$ باید باشد زیرا اگر $x \geq 5$ باشد $x[x] \geq 25$ و اگر $x \leq 4$ باشد، $x[x] \leq 16$ است. اگر $x \in (4, 5)$ باشد، $[x] = 4$ است. پس:

$$x[x] = 23 \xrightarrow{[x]=4} 4x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{4}$$

چون $\frac{23}{4} \notin (4, 5)$ است، پس به ازای $x > 0$ معادله جواب ندارد.

اگر $x < 0$ ، باید $-4 < x < -5$ باشد؛ زیرا اگر $-4 \leq x < 0$ باشد، $x[x] \leq 16$ و اگر $x \leq -5$ باشد، $x[x] \geq 25$ است. بنابراین داریم:

$$-5 < x < -4 \Rightarrow [x] = -5 \Rightarrow -5x = 23 \Rightarrow x = -\frac{23}{5} \in (-5, -4)$$

پس به ازای $x < 0$ معادله یک جواب دارد.

نقاط برخورد $g(x) = \frac{x-2}{x^2+x+1}$ با محورهای مختصات را پیدا می کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow g(0) = -2 \Rightarrow A(0, -2)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 0)$$

تابع f از نقاط A و B می گذرد، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = x - 2$ است.

$$g(x) > f(x) \Rightarrow \frac{x-2}{x^2+x+1} > x-2$$

$$\xrightarrow{\times(x^2+x+1)} x-2 > (x-2)(x^2+x+1)$$

$$\Rightarrow x-2 > x^3-2x^2+x^2-2x+x-2 \Rightarrow x^3-x^2-2x < 0$$

$$\Rightarrow x(x^2-x-2) < 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow$$

x	-1	0	2
	-	+	-
	-	+	-
	-	+	-

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$$

توجه: دقت کنید که $x^2+x+1 > 0$ است.

چهار حالت ممکن است:

(۱) هر دو جمله از ضابطه بالا انتخاب شوند:

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2$$

(۲) هر دو جمله از ضابطه پایین انتخاب شوند:

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 3n = 3$$

(۳) جمله بزرگ از ضابطه بالا و جمله کوچک از ضابطه پایین انتخاب شوند:

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 3n = -n + 2$$

(۴) جمله کوچک از ضابطه بالا و جمله بزرگ از ضابطه پایین انتخاب شوند:

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2n = n + 3$$

فقط حالت چهارم می‌تواند برابر ۱۲ قرار گیرد:

$$n + 3 = 12 \Rightarrow n = 9$$

$$a_9 = 18$$

توجه کنید چون $n \in \mathbb{N}$ است پس $1 < \frac{3n}{3n+1} < \infty$ خواهد بود.

$$b_n = [(-1)^n + \frac{3n}{3n+1}] = (-1)^n + [\frac{3n}{3n+1}] = (-1)^n$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{100} = -1 + 1 + 1 + \dots + 1 = -1 + 99 = 98$$

$$a_n = [\frac{2n(-1)^n}{2n+1}] = \begin{cases} [\frac{2n}{2n+1}] & \text{زوج } n \\ [\frac{-2n}{2n+1}] & \text{فرد } n \end{cases}$$

جملات ردیف فرد دنباله a_n برابر ۱- و جملات ردیف زوج آن برابر صفر است.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

بنابراین مجموع صد جمله دنباله c_n برابر ۴۸ است.

نکته: تابع پلکانی تابع چندضابطه‌ای است که هر ضابطه آن عددی ثابت است.

بنابراین بایستی ضریب x را در ضابطه اول برابر با صفر قرار دهیم:

$$(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, (2m^2 + 1) = 2(4) + 1 = 9$$

پس ضابطه تابع g به‌صورت زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & ; x < -1 \\ 9 & ; x \geq -1 \end{cases} \quad (*)$$

$$g(2m+1) = g(5) = 9$$

$$\sqrt{x} \Rightarrow D_1 : x \geq 0$$

$$\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow D_2 : 1-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 = [0, 1)$$

می‌دانیم:

$$x^{\frac{1}{2}} + ax = \left(x + \frac{a}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

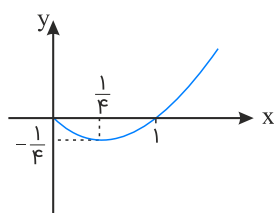
$$\Rightarrow x + a\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{a}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

داریم:

$$y = x - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

می‌دانیم حداقل یک عبارت به صورت $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ صفر است، پس حداقل تابع به صورت $y_{\min} = 0 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}$ و $y \geq -\frac{1}{\frac{1}{2}}$ است؛ این اتفاق وقتی می‌افتد که:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

اول: عبارت $-x^2 + 4x + 12$ را کمی ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 12 &= -(x^2 - 4x - 12) = -(\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 16) \\ &= -((x-2)^2 - 16) = -(x-2)^2 + 16 \\ f(x) &= \sqrt{-(x-2)^2 + 16} \xrightarrow{x=2+\sqrt{y}} f(2+\sqrt{y}) = \sqrt{-(2+\sqrt{y}-2)^2 + 16} \\ &= \sqrt{-(\sqrt{y})^2 + 16} = \sqrt{-y + 16} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

برای پیدا کردن $f(2)$ در ضابطه $f(x)$ به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \xrightarrow{x=2} f(2) = \sqrt{-4 + 8 + 12} = \sqrt{16} = 4 \\ f(2+\sqrt{y}) - f(2) &= 3 - 4 = -1 \end{aligned}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

برای عبارت $x-1 + \frac{1}{x-1}$ دو حالت وجود دارد:

$$\begin{aligned} 1) \quad x-1 + \frac{1}{x-1} &\geq 2 \xrightarrow{+2} \underbrace{x-1 + \frac{1}{x-1} + 2}_{f(x)} \geq 4 \\ 2) \quad x-1 + \frac{1}{x-1} &\leq -2 \xrightarrow{+2} \underbrace{x-1 + \frac{1}{x-1} + 2}_{f(x)} \leq 0 \end{aligned}$$

باتوجه به نامساوی‌های فوق $f(x) \geq 4$ یا $f(x) \leq 0$ است. پس برد $f(x)$ شامل بازه $(0, 4)$ نیست.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

چون دامنه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ برابر $(-\infty, 4)$ می‌باشد، بنابراین تابع $g(x)$ به ازای $x = 4$ صفر می‌شود:

$$g(4) = 0 \Rightarrow \sqrt{a(4) + 6} = 0 \Rightarrow 4a + 6 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow g(x) = \sqrt{-\frac{3}{2}x + 6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{4}{3}\right)}{g\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left|\frac{4}{3} - 2\right| = \frac{2}{3}, \quad g\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{-\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} + 6} = 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

ابتدا نامعادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{4x^2 + 5x + 1}{|x - 2|(x^2 + 2x + 1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 5x + 1}{|x - 2|(x + 1)^2} \leq 0$$

عبارت‌های $|x - 2|$ و $(x + 1)^2$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند و به شرط توجه به ریشه‌های آن‌ها ($x = -1, 2$) که عضو دامنه تابع نیستند، می‌توان آن‌ها را در تعیین علامت نادیده گرفت. پس داریم:

$$4x^2 + 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow (x + 1)\left(x + \frac{1}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{x \neq -1, 2} -1 < x \leq -\frac{1}{4}$$

حال به سراغ عبارت $[x + 1] + \frac{x}{|4x|}$ می‌رویم. اول تکلیف جزء صحیح و سپس تکلیف قدر مطلق را معلوم می‌کنیم:

$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین را با یک}} 0 < x + 1 \leq \frac{3}{4} \Rightarrow [x + 1] = 0$$

$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در چهار}} -4 < 4x \leq -1 \Rightarrow |4x| = -4x$$

پس داریم:

$$[x + 1] + \frac{x}{|4x|} = 0 + \frac{x}{-4x} = -\frac{1}{4}$$

از نمودار $f \times g$ نتیجه می‌گیریم:

$$(f \times g)(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 1 \\ -1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\begin{cases} (f \times g)(x) = 1 \xrightarrow{x > 1} 1 = \frac{1}{x-1} \times g(x) \xrightarrow{x > 1} g(x) = x-1 \\ (f \times g)(x) = -1 \xrightarrow{x < 1} -1 = \frac{1}{x-1} \times g(x) \xrightarrow{x < 1} g(x) = -(x-1) \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x-1|$$

$$\begin{cases} f(x) = c & \text{تابع ثابت} \\ g(x) = [-x] \Rightarrow g(-3/2) = [-(-3/2)] = [3/2] = 3 \end{cases}$$

$$(f \times g)(-3/2) = f(-3/2) \times g(-3/2) = -6$$

$$\Rightarrow f(-3/2) = \frac{-6}{3} = -2 \Rightarrow f(-3/2) = -2$$

در نتیجه چون f یک تابع ثابت است، بنابراین $f(-5/2)$ نیز برابر -2 می شود.

دامنه تابع $f(x)$ به صورت $\mathbb{R} - \{1\}$ است، پس $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج است.

$$2x^2 - ax + b = m(x-1)^2 = m(x^2 - 2x + 1) = mx^2 - 2mx + m$$

$$\Rightarrow m = 2, a = 4, b = 2$$

پس $a = 4$ و $b = 2$ است. حالا مقدار $f(a+b)$ را به دست می آوریم.

$$f(a+b) = f(6) = \frac{6+1}{2(6-1)^2} = \frac{7}{2 \times 25} = \frac{7}{50} = \frac{14}{100}$$

دامنه تابع را محاسبه و با دامنه داده شده مقایسه می کنیم. توجه داشته باشید که $a > 0$ است (در غیر این صورت دامنه تابع به صورت $(\frac{b}{a}, +\infty)$ درمی آید).

$$2ax - 3b \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3b}{2a}$$

باتوجه به دامنه ای که مسئله داده است:

$$\frac{3b}{2a} = \frac{b}{2} \Rightarrow a = 3$$