



گزینه ۱

۱

تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است.

$$f(o) = o \Rightarrow a = o$$

ضمناً $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2}} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx}{x} = 2 \Rightarrow b = 2$$

پس $a + b = 2$ است.

گزینه ۴

۲

باتوجه به شکل تابع، وقتی $x \rightarrow 2^-$ حد تابع برابر ۳ و وقتی $x \rightarrow 2^+$ حد تابع برابر ۵ است و چون این دو مقدار باهم برابر نیستند پس تابع در $x = 2$ حد ندارد.

گزینه ۳

۳

طبق کتاب درسی: مساحت چندضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع چندضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود) درواقع حد مساحت چندضلعی‌ها در بی‌نهایت برابر مساحت دایره یا πr^2 است.

گزینه ۴

۴

اولاً $x = \frac{\pi}{2}$ در دامنه تابع نیست، پس مخرج در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر صفر است.

$$y = \frac{b \cos^2 x}{a - 2 \sin x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2} \text{ مخرج را صفر می‌کند}} a = 2 \Rightarrow y = \frac{b(1 - \sin^2 x)}{2 - 2 \sin x} \\ = \frac{b(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{2(1 - \sin x)} = \frac{b(1 + \sin x)}{2}$$

ازطرفی حد تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر ۱ است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{b(1 + \sin x)}{2} = 1 \Rightarrow \frac{b(1 + 1)}{2} = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$a + b = 2 + 1 = 3$$

گزینه ۳

۵

طبق صورت سؤال $P(1) = -2$ و $P(-2) = 3$ است. حالا برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(P(x)) + P(x - 3)$ بر $x - 1$ ، باید ریشه $x - 1$ ، یعنی $x = 1$ را قرار دهیم. داریم:

$$R = P(\underbrace{P(1)}_{-2}) + P(1 - 3) = P(-2) + P(-2) = 3 + 3 = 6$$

در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ جواب حد $+\infty$ است ولی در گزینه ۴ مخرج به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و کل کسر به صفر میل می‌کند.

$$۱) \lim_{x \rightarrow ۳} \left| \frac{۲x-۱}{x-۳} \right| = \left| \frac{۵}{۰^+} \right| = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{۱}{۱ + \cos x} = \frac{۱}{۱ + (-۱)} = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow ۳} \frac{x-۲}{۲(x-۳)^۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\sin x]}{[\cos x]} = \frac{[\sin \pi^+]}{[\cos \pi^+]} = \frac{[۰^-]}{[(-۱)^+]} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

$$n > ۴ : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{۴x^n}{-x^n} \right) = -۴$$

$$n = ۴ : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{۴x^۴ - x^۴}{-x^۴} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۳x^۴}{-x^۴} = -۳$$

$$n = ۳ : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^۴}{-x^۳} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$n = ۲ : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^۴}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^۳) = -\infty$$

$$n = ۱ : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^۴}{x^۲} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^۲) = -\infty$$

نکته:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+} = +\infty \quad \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-} = -\infty \quad \frac{\text{عدد منفی}}{۰^-} = +\infty$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow ۴} \frac{-۲x}{x-۴} = \frac{-۲(۴)}{۴^- - ۴} = \frac{-۸}{۰^-} = +\infty$$

نکته: اعداد ۰^+ یا ۰^- را صفر حدی می‌نامیم. درواقع این اعداد به معنای صفر اصلی (صفر مطلق) نیستند، بلکه یک عدد بسیار نزدیک به صفر هستند؛ بنابراین توجه شود که:

$$\text{الف) } \frac{\text{عدد}}{۰^{\text{حدی}}} = \infty$$

$$\text{ب) } \frac{\text{عدد}}{۰^{\text{مطلق}}} = \text{تعریف نشده}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-۳)^-} \frac{[x+۵]}{x+۳} = \frac{[(-۳)^- + ۵]}{(-۳)^- + ۳} = \frac{[۲^-]}{۰^-} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-۳)^+} \frac{x+۴}{[x+۳]} = \frac{-۳+۴}{[(-۳)^+ + ۳]} = \frac{۱}{[۰^+]} = \frac{۱}{\text{مطلق } ۰} = \text{تعریف نشده}$$

باتوجه به حاصل حد، مخرج باید ریشه مضاعف ۳ داشته باشد، پس باید مخرج به صورت $2(x-3)^2$ باشد.

$$2(x-3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$$

با مقایسه رابطه به دست آمده با مخرج کسر -12 ، $a = -12$ ، $b = 18$ و در نتیجه: $a + 2b = 24$.

حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ صفر می شود. چون حاصل حد، عدد شده است، پس حد صورت نیز باید صفر باشد تا بعد از رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ، حاصل حد که یک عدد است (L) ، به دست آید. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (a \cos^4 x - 1) = 0 \Rightarrow a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{4} - 1 = 0 \Rightarrow a = 4$$

با جایگذاری $a = 4$ ، حاصل حد را حساب می کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \cos^4 x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(2 \cos^2 x - 1)(2 \cos^2 x + 1)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x)}$$

هر دو عبارت $2 \cos^2 x - 1$ و $\cos^2 x - \sin^2 x$ برابر با $\cos 2x$ هستند، پس می توانیم آن ها را از صورت و مخرج، ساده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{(2 \cos^2 x - 1)(2 \cos^2 x + 1)}^{\cos 2x}}{\underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} (\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x)} = \frac{2 \times \frac{2}{4} + 1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \Rightarrow L = \frac{8}{3}$$

پس حاصل $a + 3L$ برابر است با:

$$a + 3L = 4 + 3 \left(\frac{8}{3} \right) = 4 + 8 = 12$$

کافی است عدد ۲ را در تابع داده شده جایگذاری کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2}{2x^2 - x - 5} = \frac{(2+2)^2}{2(2)^2 - 2 - 5} = \frac{16}{1} = 16$$

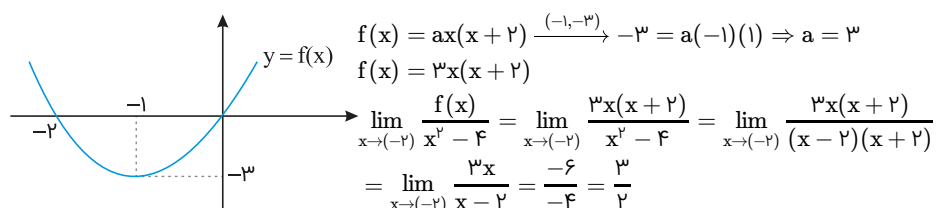
در $+\infty$ حاصل 3^{1-2n} برابر $3^{-\infty} = 0$ است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n+1} - 3^{1-2n}}{2 \times 3^n + 9^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n+1} - 0}{2 \times 3^n + \frac{9^n}{9}}$$

در مخرج کسر از 9^n فاکتور می گیریم:

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 3^{2n}}{9^n \left(\frac{2}{3^n} + \frac{1}{9} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 9^n}{9^n \left(\frac{2}{3^n} + \frac{1}{9} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{2}{3^n} + \frac{1}{9}} = \frac{3}{0 + \frac{1}{9}} = 27$$

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{f(x)}{x^2 - 4}$ در صورتی موجود است که $x = -2$ ریشهٔ صورت هم باشد؛ پس معادلهٔ سهمی را می‌توانیم بنویسیم:



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[-x] + f(x)}{2x} = \frac{[(-1)^-] + 2}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] + a = [1^-] + a = 0 + a$$

برای اینکه تابع $g(x)$ در $x = 1$ پیوسته باشد، باید مقادیر بالا برابر باشند؛ پس $a = 0$ است.

$$(x \rightarrow 1^+) \Rightarrow \left(\frac{1}{2x-1} \rightarrow 1^- \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x-1|) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f([-x]) = f([-0^-]) = f([0^+]) = f(0) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x+1)] = [f(0^-+1)] = [f(1^-)] = [2^-] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(|x-1|) + f([-x]) + [f(x+1)]) = 0$$

برای آنکه حد یک تابع گویا در بی‌نهایت، یک عدد شود باید درجه صورت از درجه مخرج، کوچک‌تر یا مساوی باشد. درجه مخرج ۲ است، پس درجه صورت هم باید ۲ باشد. ضریب x^3 را در صورت، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\cancel{2}x + 1)^3 + a(x - 1)^3}{b(x + \cancel{2})^2 + (x - \cancel{3})^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{8}x^3 + 1\cancel{2}x^2 + \cancel{6}x + 1 + ax^3 - \cancel{3}ax^2 + \cancel{3}ax - a}{bx^2 + \cancel{F}bx + \cancel{F}b + x^2 - \cancel{6}x + \cancel{9}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{(\lambda + a)}^{\text{صفر}} x^3 + (1\cancel{2} - \cancel{3}a)x^2 + (\cancel{6} + \cancel{3}a)x + (1 - a)}{(b + 1)x^2 + (\cancel{F}b - \cancel{6})x + (\cancel{F}b + \cancel{9})}$$

$$x^3 \text{ ضریب } = 0 \Rightarrow \lambda + a = 0 \Rightarrow a = -\lambda$$

با جایگذاری $a = -\lambda$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3}\cancel{6}x^2 - 1\lambda x + \cancel{9}}{(b + 1)x^2 + (\cancel{F}b - \cancel{6})x + (\cancel{F}b + \cancel{9})} = \frac{\cancel{3}\cancel{6}}{b + 1}$$

حاصل حد باید با $\frac{a}{\cancel{3}}$ یعنی -4 برابر باشد. داریم:

$$\frac{\cancel{3}\cancel{6}}{b + 1} = -4 \Rightarrow b + 1 = -9 \Rightarrow b = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{1 - \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(1 + \sqrt{x})}{(1 - x)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1)} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] + a = [-1^-] + a = [(-1)^+] + a = -1 + a$$

مقادیر بالا باید برابر باشند:

$$-1 + a = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

مقدار تابع در $x = -3$ به مقدار حد در این نقطه ارتباطی ندارد، پس $b \in \mathbb{R}$ است، اما حد چپ و راست باید برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} (ax^2 + \cancel{6}x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (\cancel{2}x) \Rightarrow 9a - 18 = -6 \Rightarrow a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan\left(\frac{1}{x} - \pi\right) = \tan\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}^+} - \pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}^- - \pi\right) = \tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-\right) = +\infty$$

$$\frac{x-6}{x^2-2x+4} < -1 \Rightarrow \frac{x-6}{x^2-2x+4} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{x-6+x^2-2x+4}{x^2-2x+4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+4} < 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x+4} < 0$$

توجه کنید که:

$$x^2-2x+4 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = -12 < 0 \\ x^2 \text{ ضرب مثبت است} = 1 > 0 \end{cases}$$

$$(x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

x	-1	2
(x-2)(x+1)	+ ○	- ○ +

$$\Rightarrow (-1, 2)$$

در نتیجه همسایگی راست عدد (-1) است.

حد چپ:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x-1]}{\sqrt{x}-x} = \frac{[1^-]-1}{\sqrt{1^-}-1^-} = \frac{0-1}{0^+-1^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f(x) = \left[\frac{-5x+5-2}{x-1} \right] = \left[-5 - \frac{2}{x-1} \right]$$

$$f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = f\left(\frac{\overbrace{x-2}^t}{x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-5 - \frac{2}{x-1} \right] = [-3^-] = -4 \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = [-5 + 0^+] = [-5^+] = -5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) - \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = -5 - (-4) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{w^{a-x} + w^x - 12}{w^x - w^{2-x}} = \frac{w^{a-1} + w - 12}{w - w} = \frac{w^{a-1} - 9}{0}$$

از آنجاکه حد مخرج کسر برابر صفر است، پس حاصل حد صورت کسر نیز باید صفر باشد تا حالت $\frac{0}{0}$ اتفاق بیفتد.

$$w^{a-1} - 9 = 0 \Rightarrow w^{a-1} = 9 = w^2 \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{w^{3-x} + w^x - 12}{w^x - w^{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{27}{w^x} + w^x - 12}{w^x - \frac{9}{w^x}}$$

با استفاده از تغییر متغیر $w^x = t$ می‌توان نوشت:

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow w$$

$$\lim_{t \rightarrow w} \frac{\frac{27}{t} + t - 12}{t - \frac{9}{t}} = \lim_{t \rightarrow w} \frac{t^2 - 12t + 27}{t^2 - 9} = \lim_{t \rightarrow w} \frac{\cancel{(t-3)}(t-9)}{\cancel{(t-3)}(t+3)} = -1$$

می‌دانیم $\sin^y \alpha + \cos^y \alpha = 1$ و $\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$ با جایگذاری $\alpha = \frac{\pi}{y}$ در عبارت، به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم؛ پس رفع ابهام می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{y}} \frac{1^y \sin^y \frac{\alpha}{y} \cos^y \frac{\alpha}{y} - 1^y}{\cos^y \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{y}} \frac{1^y (\sin^y \frac{\alpha}{y} \cos^y \frac{\alpha}{y} - 1)}{\cos^y \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{y}} \frac{1^y ((\sin^y \frac{\alpha}{y} \cos^y \frac{\alpha}{y})^y - 1)}{\cos^y \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{y}} \frac{1^y (\sin^y \alpha - 1)}{\cos^y \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{y}} \frac{-1^y (1 - \sin^y \alpha)}{\cos^y \alpha} = -1^y \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (1^y x^y + ax + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (1^y x^y + 1)} = \frac{1^y + a + 1}{1^y + 1} = \frac{1 + a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^y - 1}{x^y - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^y - 1}{x^y - x - 1} \right] = [1^-] = 0 \end{aligned}$$

تذکر: دقت کنید که داخل جزء صحیح به ۱ میل می‌کند، ولی از آن کمتر است. چون $(-x)$ در $-\infty$ عددی مثبت است و این باعث می‌شود مخرج کسر از صورت آن بزرگتر باشد؛ پس حاصل نهایی $\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$ است.

صورت کسر در $x = 2$ صفر است، پس مخرج هم باید صفر باشد:

$$\text{مخرج: } ax - \sqrt{x^y + b} \xrightarrow{x=2} 2a - \sqrt{1 + b} = 0 \Rightarrow 2a = \sqrt{1 + b}$$

$$\xrightarrow{2 \text{ توان}} 4a^2 = 1 + b \Rightarrow 4a^2 - 1 = b$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^y - x - 1|}{ax - \sqrt{x^y + b}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-2)(x+1)|}{ax - \sqrt{x^y + b}} \times \frac{ax + \sqrt{x^y + b}}{ax + \sqrt{x^y + b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)(ax + \sqrt{x^y + b})}{a^y x^y - x^y - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)(2a + \sqrt{1 + 4a^2 - 1})}{a^y x^y - x^y - (4a^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(1)(4a)}{a^y x^y - 4a^2 - x^y + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-12a(x-2)}{a^y (x^y - 4) - (x^y - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-12a(x-2)}{(x^y - 4)(a^y - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-12a}{(x+2)(a^y - 1)} \\ &= \frac{-12a}{4(a^y - 1)} = \frac{-3a}{a^y - 1} = -2 \Rightarrow 3a = 2a^2 - 2 \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (a-2)(2a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$