



گزینه ۲

۱

$$A \in (y = f(\frac{1-x}{2})) \Rightarrow f(\frac{1+x}{2}) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow (1, 2) \in f(x)$$

در تابع $g(x) = f(x) + f(2x - 1)$ به جای x عدد ۱ قرار می‌دهیم:

$$g(1) = f(1) + f(1) = 2f(1) = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow (1, 4) \in g$$

گزینه ۲

۲

نمودار رابطه‌ای تابع است که هر خط موازی محور y را حداکثر در یک نقطه قطع کند که با بررسی گزینه‌ها نمودار مربوط به گزینه "۲" تابع است.

گزینه ۳

۳

با داشتن ۲ نقطه معادله خط f را می‌نویسیم. g نیز از خانواده $y = \frac{k}{x}$ است که یک واحد به راست منتقل شده است و داریم:

$$(0, 1), (1, 3) \in f \Rightarrow m = \frac{3-1}{1-0} = 2 \Rightarrow y-1 = 2x \Rightarrow f(x) = 2x+1$$

$$f(x) = 2x+1 \Rightarrow y = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = \frac{x-1}{2} = f^{-1}(x)$$

$$g(x) = \frac{k}{x-1} \Rightarrow A(0, -1) \in g(x) = \frac{k}{x-1} \Rightarrow -1 = \frac{k}{-1} \Rightarrow 1 = k \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$h(x) = g(f^{-1}(x)) = g(\frac{x-1}{2}) = \frac{1}{\frac{x-1}{2}-1} = \frac{1}{\frac{x-1-2}{2}} \Rightarrow h(x) = \frac{2}{x-3}$$

گزینه ۲

۴

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & ; n = 2k \\ -1 & ; n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; n = 2k \\ -\frac{1}{n} & ; n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \begin{cases} 0 & ; n = 2k \\ -1 & ; n = 2k+1 \end{cases}$$

پس جملات شماره زوج صفر و جملات شماره فرد برابر ۱- است، در نتیجه:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{21} = -1 + 0 - 1 + 0 - \dots + 0 - 1 = -36$$

گزینه ۴

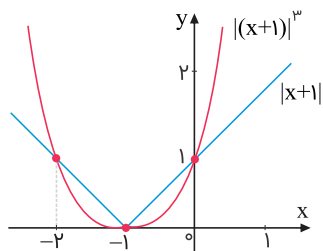
۵

در تابع ثابت، همه مقادیر y یکسان بوده و باهم برابر می‌باشند.

$$b = 4 = a + b$$

$$b = 4, \quad a + b = 4 \xrightarrow{b=4} a + 4 = 4 \Rightarrow a = 0$$

نمودار توابع $y_1 = |(x+1)|^3$ و $y_2 = |x+1|$ را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل در فاصله $[-2, 0]$ نمودار y_1 پایین‌تر یا مساوی y_2 قرار دارد.

$$b - a = 0 - (-2) = 2$$

ابتدا $f \circ g$ را می‌سازیم:

$$y = f(g(x) = x^2 - 1) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1} = \begin{cases} 1 & ; x^2 - 1 > 0 \Rightarrow -1 > x \text{ یا } x > 1 \\ -1 & ; x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

حال $h(x) = x^2$ را در این تابع ضرب می‌کنیم:

$$y = h(x) f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ -x^2 & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

که در بازه $(-1, 1)$ قرینه x^2 نسبت به محور x ها است و در خارج از این بازه همان x^2 است. در $x = \pm 1$ هم که مخرج $y = f(g(x)) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}$ تعریف نشده است، تابع y تعریف نمی‌شود.

چون دو تابع برابرند، پس به ازای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ ، مقدار دو تابع برابر است. پس به ازای $x = 2$ و $x = 0$ در تساوی، مقدار ab را پیدا می‌کنیم، داریم:

$$g(2) = f(2)$$

$$\Rightarrow 2(2)^2 - a = 2a + b \Rightarrow 3a + b = 8 \quad (*)$$

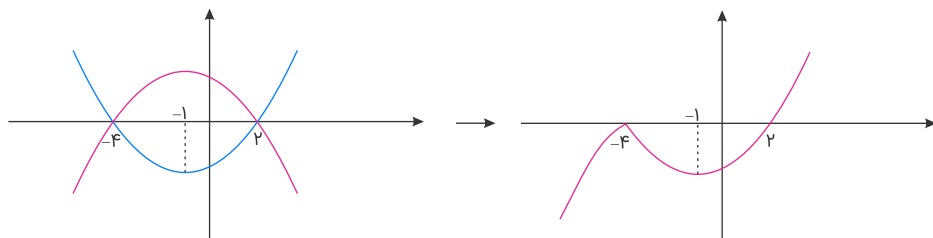
$$g(0) = f(0) \Rightarrow \frac{0+1}{0-2} = a(0) + b \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} 3a + b = 8 \rightarrow 3a - \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 3a = \frac{17}{2} \Rightarrow a = \frac{17}{6}$$

$$\Rightarrow ab = \left(\frac{17}{6}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-17}{12}$$

$$y = \begin{cases} (x-2)(x+4) & ; x \geq -4 \\ -(x-2)(x+4) & ; x \leq -4 \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، در بازه $[-4, -1]$ نزولی اکید است.

به دلیل وجود $[x] + [-x]$ در معادله در دو حالت $x \in \mathbb{Z}$ و $x \notin \mathbb{Z}$ معادله را حل می‌کنیم.

$$x \in \mathbb{Z} : [x] + [-x] = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

جواب‌های به‌دست‌آمده باید صحیح باشند، پس $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ قابل قبول نیستند.

$$x \notin \mathbb{Z} : [x] + [-x] = -1 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{3+(-1)+(-2)=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

در این مرحله باید جواب‌ها غیر صحیح باشند پس تنها $x = -\frac{2}{3}$ قابل قبول است.

دو زوج مرتب هنگامی با یکدیگر برابرند که مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با یکدیگر برابر باشند، در نتیجه داریم:

$$(\lambda, m - 3n) = (m + n, -4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - 3n = -4 \\ m + n = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 3n = -4 \\ \underline{-m - n = -\lambda} \\ -4n = -\lambda - 4 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

$$m + 3 = \lambda \Rightarrow m = \omega$$

$$m - n = \omega - 3 = 2$$

دامنه تابع $f(x)$ و $g(x)$ باید برابر باشد. مخرج $f(x)$ باید $(x-1)^2$ باشد:

$$f(x) = \frac{ax + 3}{x^2 + bx + 1} = \frac{ax + 3}{(x-1)^2} \Rightarrow b = -2$$

ازطرفی تابع $f(x)$ پس از اینکه صورت و مخرج باهم ساده می‌شوند، باید به فرم $g(x) = \frac{c}{x-1}$ باشد:

$$f(x) = \frac{ax + 3}{(x-1)^2} = \frac{a\left(x + \frac{3}{a}\right)}{(x-1)^2} \Rightarrow x + \frac{3}{a} = x-1 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{x-1}$$

بنابراین $c = -3$ است.

$$a + b + c = -3 + (-2) + (-3) = -8$$

اگر عملیات گفته شده در مسئله را اعمال کنیم، به تابع $1 + \sqrt{x+1}$ می‌رسیم. حال دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم تا نقطه برخورد را محاسبه کنیم:

$$1 + \sqrt{x+1} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان دو}} 1 + x + 1 + 2\sqrt{x+1} = x$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \text{معادله فاقد ریشه است.}$$

پس نمودارهای دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

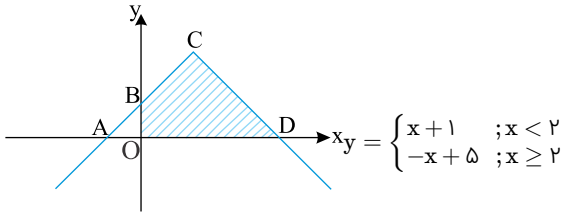
تابع $f(x)$ به ازای $x \geq 0$ به صورت $y = x$ است، پس به ازای $2 \leq x < 3$ هم که زیرمجموعه‌ای از $x > 0$ می‌باشد، برابر $f(x) = x$ است.

تابع $[x]$ به ازای $2 \leq x < 3$ به صورت $[x] = 2$ در می‌آید، در نتیجه:

$$g(x) = 2 + 2 = 4 \Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = x - 4$$

نمودار پیکانی مربوط به یک رابطه، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد، لذا فقط نمودار پیکانی گزینه "۴" بیانگر یک تابع است.

ابتدا ضابطه تابع را می نویسیم:

با تعیین محل برخورد شکل با محور x ها و y ها، مساحت قابل محاسبه است:

$$y = 0 \Rightarrow -|x - 2| + 3 = 0 \Rightarrow -|x - 2| = -3 \Rightarrow |x - 2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس دو نقطه برخورد شکل با محور x ها نقاط $(-1, 0)$ و $(5, 0)$ می باشد.

$$x = 2 \Rightarrow y = -|2 - 2| + 3 = 3 \Rightarrow (2, 3) \text{ نقطه رأس نمودار}$$

پس در مثلث $\triangle ACD$ قاعده برابر $AD = 1 + 5 = 6$ و ارتفاع $y_2 = 3$ است. مثلث $\triangle OAB$ نیز ارتفاع و قاعده ۱ دارد پس:

$$\frac{3 \times 6}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = 9 - \frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$$

تابع خطی است که در $x = \pm 1$ تعریف نشده است، لذا این دو عدد ریشه مخرج هستند.

$$x^2 + c = 0 \Rightarrow 1 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = -1} \Rightarrow \underline{c^2 = 1}$$

$$y = \frac{a^2 x^3 + 2x^2 - x + b}{x^2 - 1} = \text{خط} ; x \neq \pm 1$$

چون تابع خط شده، پس صورت بر مخرج بخش پذیر است. صورت را بر مخرج تقسیم کرده و باقی مانده را برابر با صفر قرار می دهیم:

$$\begin{array}{r|l} a^2 x^3 + 2x^2 - x + b & x^2 - 1 \\ \hline -a^2 x^3 + a^2 x & \\ \hline 2x^2 + a^2 x - x + b & \\ -2x^2 + 2 & \\ \hline (a^2 - 1)x + b + 2 & \end{array}$$

$$(a^2 - 1)x + b + 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow b^2 = 4$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 1 - 4 + 1 = -2$$

جعبه ابزار:

طول‌های نقطه‌های نمودار $y = f(kx)$ ، $\frac{1}{k}$ برابر طول‌های نقطه‌های نمودار $y = f(x)$ است. ضابطه‌های تابع را استاندارد می‌کنیم.

$$y = \frac{3}{4}f(2x-1) + \frac{1}{4}$$

$$y = -f\left(-\frac{2x}{5} + 1\right) + 3$$

اکنون نقطه نظیر نقطه (x_0, y_0) را می‌یابیم.

$$\begin{array}{ccc} (x_0, y_0) & & (-5x_0 + 5, 3 - \frac{2y_0 - 1}{4}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (2x_0 - 1, \frac{y_0 - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}) & = & (2x_0 - 1, \frac{2y_0 - 1}{3}) \end{array}$$

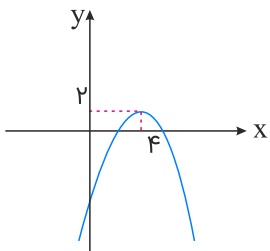
با ساده کردن نقطه نهایی مختصات نقطه نظیر نقطه A به صورت $(-5x_0 + 5, \frac{1_0 - 2y_0}{3})$ است.

نموداری مربوط به یک تابع است که در آن هر خط موازی محور عرض‌ها حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع کند. در گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" خط(های) قائمی یافت می‌شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند، پس این نمودارها مربوط به تابع نیستند.

دامنه تابع قدر مطلق، مجموعه اعداد حقیقی است. اما برد آن فقط شامل اعداد حقیقی مثبت و صفر است.

در تابع خطی به صورت $y = mx + h$ محل تقاطع نمودار با محور y را نشان می‌دهد؛ به عبارت دیگر h عرض از مبدأ نمودار تابع خطی نامیده می‌شود.

از نمودار $y = x^2$ آغاز می‌کنیم پس نمودار را ۴ واحد به راست برده، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و در نهایت ۲ واحد به بالا می‌بریم:



طبق شکل از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

از نمودار مشخص است که $-1 \leq f(x) \leq 2$ است، پس $f(2x)$ هم در همین فاصله است.

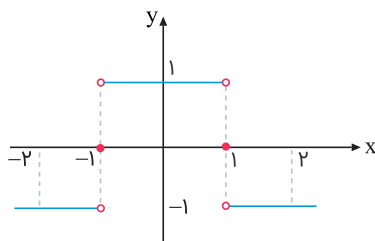
$$-1 \leq f(2x) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -f(2x) \leq 1 \xrightarrow{+1} -1 \leq 1 - f(2x) \leq 2$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال}} 0 \leq \sqrt{1 - f(2x)} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \text{برد: } [0, \sqrt{2}]$$

جعبه ابزار: رسم نمودار - ترکیب توابع $f \circ g(x) = f(g(x))$
ضابطه تابع $f \circ g(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 1 & ; 1 - x^2 > 0 \\ 0 & ; 1 - x^2 = 0 \\ -1 & ; 1 - x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x = \pm 1 \\ -1 & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

نمودار را رسم و مساحت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم.



$$(1 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 1) = 4$$

چالش سوال: حساب کردن مساحت تابع از روی نمودار - خواص ترکیب توابع

تابع گویا، تابعی کسری است که در صورت و مخرج کسر آن، توابع چندجمله‌ای قرار می‌گیرند (البته مخرج کسر نباید صفر باشد). و می‌دانیم در یک تابع چندجمله‌ای، درجه جملات همگی عضو اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) هستند.

در گزینه "۱"، صورت و مخرج، هر دو چندجمله‌ای از درجه ۱ هستند.

در گزینه "۲"، بعد از نوشتن $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$ ، باز هم صورت و مخرج هر دو، چندجمله‌ای از درجه ۱ می‌شوند.

در گزینه "۳"، در صورت، یک چندجمله‌ای از درجه ۱ داریم. اما در مخرج کسر بعد از نوشتن $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ ، از آنجا که $\frac{1}{4} \notin \mathbb{W}$ پس همین گزینه جواب تست است. ضمناً دقت کنید که گزینه "۴" را می‌توان به صورت $y = 3 = \frac{3}{1}$ نوشت که در آن، هم صورت و هم مخرج، چندجمله‌ای از درجه صفر محسوب می‌شوند.

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 2g^2(x) + 4 \\ f(g(x)) = 4x^2 + 6x \\ \Rightarrow 2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \Rightarrow g^2(x) = 2x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=-2} g^2(-2) = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

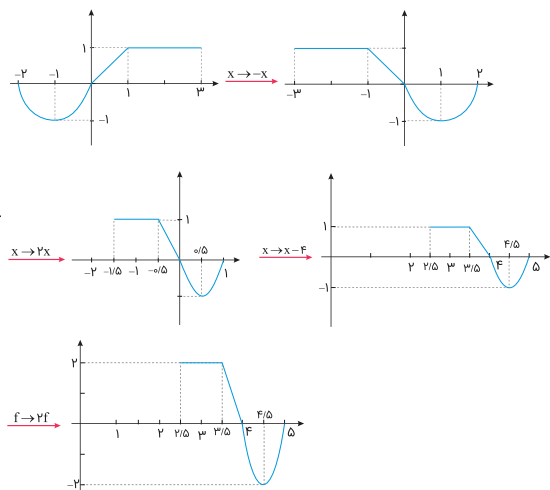
در تابع همانی، هر زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول و دوم مساوی است.

$$a + 1 = 5 \Rightarrow a = 4, \quad b - 1 = 3 \Rightarrow b = 4, \quad 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

با مشخص شدن a, b, c تابع f را می‌نویسیم:

$$f = \{(x_1, a), (x_2, b), (x_3, c)\} = \{(x_1, 4), (x_2, 4), (x_3, 4)\}$$

در تابع f همه مؤلفه‌های دوم یعنی مقادیر y با یکدیگر مساوی هستند، بنابراین f تابع ثابت است.



$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 | -\sqrt{x} = -1\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \geq 0 | x = 1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

ابتدا تابع $f^{-1}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 - 1$$

$$y = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = |x+1|$$

$$\xrightarrow{x \leq -1} \sqrt{y+1} = -(x+1) \Rightarrow -\sqrt{y+1} = x+1 \Rightarrow -\sqrt{y+1} - 1 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 1$$

حالا طول نقطه تلاقی را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow -\sqrt{x+1} - 1 = \frac{2x-1}{-3}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x+1} + 6 = 2x-1 \Rightarrow 3\sqrt{x+1} = 2x-7$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$9(x+1) = (2x-7)^2$$

$$\Rightarrow 9x+9 = 4x^2 - 28x + 49 \Rightarrow 4x^2 - 37x + 40 = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(4x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=\frac{5}{4} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$