



گزینه ۴

۱

اگر $x^{\frac{2}{3}} = t$ فرض کنیم، داریم:

$$2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 1 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$1 \times 2^{-\frac{3}{2}} = 2^k \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

حاصل ضرب جواب‌ها

گزینه ۳

۲

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت وجود دو ریشه متمایز، مجموع آن‌ها از رابطه $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها از رابطه $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید، داریم:

$$-2x^2 + x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{-2} = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{4\alpha + 4\beta}_{\text{فاکتور از ۴}} - 2\alpha\beta = 4(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times (-4) = 2 + 8 = 10$$

گزینه ۱

۳

$$x_S = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow -\frac{2}{2a} = 1 \Rightarrow a = -1$$

ازطرفی باتوجه به نمودار، عرض از مبدأ سهمی برابر ۳ است، بنابراین $c = 3$ می‌باشد. لذا:

$$y = -x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x_S=1} y_S = 4 \Rightarrow S(1, 4)$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \xrightarrow{x_A < 0} x_A = -1 \Rightarrow A(-1, 0) \\ x = 3 \end{cases}$$

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$SM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$P(1) = 3 \Rightarrow 1 + 2 - A + 4 = 3 \Rightarrow A = 4$$

$$Bx^2 - 3x - A = 0 \xrightarrow{A=4} Bx^2 - 3x - 4 = 0$$

اگر ریشه‌ها را α و β فرض کنیم:

$$\alpha = \beta + 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \Rightarrow |\alpha - \beta| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \Delta = 4a^2$$

$$\Rightarrow 9 + 16B = 4B^2 \Rightarrow 4B^2 - 16B - 9 = 0$$

$$B = \frac{\lambda \pm \sqrt{64 + 4 \times 9}}{4} = \frac{\lambda \pm 10}{4} = \frac{9}{4}, -\frac{1}{4} \xrightarrow{B > 0} B = \frac{9}{4}$$

اگر نفر اول عدد ثابت b را اشتباه دیده باشد، پس ضریب x (a) و ضریب x^2 را درست دیده و عددی که برای مجموع ریشه‌ها به دست می‌آورد، قابل اطمینان است:

$$S = \frac{-a}{2} = 3 + 6 = 9 \Rightarrow a = -18$$

نفر دوم ضریب a را اشتباه دیده، پس ضریب x^2 و عدد ثابت معادله را درست دیده است و عددی که برای حاصل ضرب ریشه‌ها به دست می‌آورد، قابل قبول است:

$$P = \frac{b}{2} = 2 \times 5 = 10 \Rightarrow b = 20$$

پس صورت صحیح معادله به این شکل بوده:

$$2x^2 - 18x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow \text{تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{41}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

پس ریشه بزرگتر $2 + \sqrt{3}$ است.

اول: فرض می‌کنیم $x^3 = A$ ، پس: $A^2 - 3A - 8 = 0$.

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^6 - 3x^3 - 8 = 0$ باشند، α^3 و β^3 ریشه‌های معادله $A^2 - 3A - 8 = 0$ خواهند بود.
دوم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

α و β را ریشه‌های معادله در نظر می‌گیریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = k$$

اگر $\alpha = k$

$$k\beta = k \Rightarrow \beta = 1$$

اگر تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد؛ یعنی دو ریشه باهم برابرند، پس معادله $\circ = bx + \lambda - 2x^2$ دارای ریشه مضاعف است و دلتای آن باید صفر باشد.

$$\Delta = \circ \Rightarrow b^2 - 4ac = \circ \Rightarrow b^2 - 4(2)(\lambda) = \circ \Rightarrow b = \lambda$$

پس معادله به صورت $\circ = \lambda x + \lambda - 2x^2$ است و داریم:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-\lambda)}{2} = 2$$

نکته: معادله کلی سهمی با رأس (x_S, y_S) به صورت $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ است.

باتوجه به نکته و نمودار داده شده مختصات رأس به صورت $(1, -2)$ است، بنابراین معادله کلی سهمی به صورت $y = a(x - 1)^2 - 2$ می باشد. همچنین نقطه $(0, -1)$ روی نمودار سهمی قرار دارد، پس:

$$\begin{aligned} -1 &= a(0 - 1)^2 - 2 \Rightarrow -1 = a - 2 \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow y &= (x - 1)^2 - 2 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 2 = x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

α و β ریشه های معادله هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4 - 2(-1) = 6$$

$$\alpha + \beta = \frac{\omega}{\gamma}, \quad \alpha\beta = 1$$

$$x' = \frac{\alpha^6 + 1}{\alpha^3} = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} \xrightarrow{\alpha\beta=1} x' = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = \frac{12\omega}{\lambda} - \frac{1\omega}{\gamma}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{12\omega - 6\omega}{\lambda} = \frac{6\omega}{\lambda}$$

$$x'' = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\alpha\beta=1} x'' = \alpha + \beta = \frac{\omega}{\gamma}$$

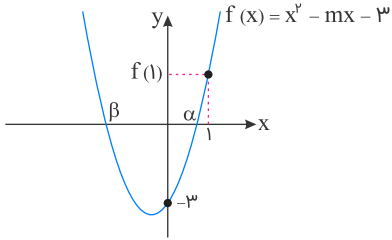
$$S_{\text{new}} = x' + x'' = \frac{6\omega}{\lambda} + \frac{\omega}{\gamma} = \frac{6\omega + 2\omega}{\lambda} = \frac{8\omega}{\lambda}$$

$$P_{\text{new}} = x'x'' = \frac{6\omega}{\lambda} \times \frac{\omega}{\gamma} = \frac{32\omega}{16}$$

معادله جدید:

$$x^2 - \frac{8\omega}{\lambda}x + \frac{32\omega}{16} = \circ \xrightarrow{\times 16} 16x^2 = 17\omega x - 32\omega$$

راه اول: مطابق شکل باید دو شرط زیر برقرار باشد:



$$\begin{cases} f(1) > 0 \Rightarrow 1 - m - 3 > 0 \Rightarrow m < -2 \\ \Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 12 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow m < -2$$

راه دوم: اگر α و β دو ریشهٔ معادله باشند، داریم:

$$\alpha - 1 < 0, \quad \beta - 1 < 0$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 12 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \\ (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0 \Rightarrow \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 > 0 \Rightarrow -3 - m + 1 > 0 \Rightarrow m < -2 \\ \alpha - 1 + \beta - 1 < 0 \Rightarrow \alpha + \beta - 2 < 0 \Rightarrow m < 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m < -2$$

در دنبالهٔ هندسی داریم:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 q^2, a_6 = a_1 q^5, a_9 = a_1 q^8 \\ \xrightarrow{\text{واسطهٔ حسابی}} a_9 + a_3 &= 2(6a_6) \Rightarrow a_1 q^8 + a_1 q^2 = 12a_1 q^5 \\ \xrightarrow{\div a_1 q^5} q^3 + 1 &= 12q^0 \Rightarrow q^3 - 12q^0 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3=t} t^3 - 12t + 1 = 0 \\ \Rightarrow \Delta &= 6^2 - 4 = 32 \Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{32}}{3} = 4 \pm \sqrt{8} \\ \xrightarrow{t=q^3} q^3 &= 4 \pm \sqrt{8} \\ \frac{a_9}{a_3} &= \frac{a_1 q^8}{a_1 q^2} = q^6 = (4 \pm \sqrt{8})^2 = 16 \pm 8\sqrt{8} + 8 = 24 \pm 8\sqrt{8} \end{aligned}$$

اگر دو ریشهٔ یک معادله وارون هم باشند، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر یک خواهد بود.

$$\begin{aligned} P &= x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 + 7}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - m + 7 = 0 \\ \Rightarrow \Delta &= 1 - 28 < 0 \end{aligned}$$

بنابراین معادله ریشه ندارد، در نتیجه هیچ مقداری برای m یافت نشد.

اول:

$$(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 3 - 1 = 0$$

$$A^2 - 3A + 2 = 0$$

$$(A - 1)(A - 2) = 0 \Rightarrow A = 1, A = 2$$

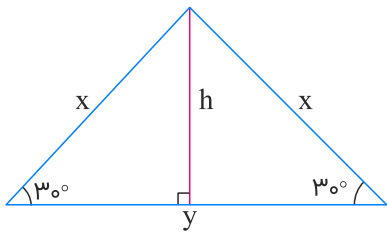
دوم: اگر $x^2 + x + 1 = A$

سوم:

$$A = 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, x = -1$$

$$A = 2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ ریشه متمایز دارد}$$

بنابراین این معادله ۴ ریشه متمایز دارد.



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x \quad (2)$$

$$S = \frac{h \times y}{2} \xrightarrow{(1), (2)} S(x) = \frac{\frac{x}{2}(12 - 2x)}{2} \Rightarrow S(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x$$

$$S_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{9}{2} = 4.5$$

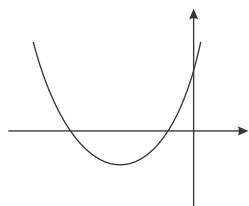
$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+4)x + 4 = 0$$

چون مجموع ضرایب توان‌های فرد با مجموع ضرایب توان‌های زوج باهم برابرند، عبارت درجه سوم بالا بر $x+1$ بخش‌پذیر است ($x = -1$ عبارت بالا را صفر می‌کند)، پس $x^3 + (a+1)x^2 + (a+4)x + 4$ را بر $x+1$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} x^3 + (a+1)x^2 + (a+4)x + 4 \mid \frac{x+1}{x^2+ax+4} \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ ax^2 + (a+4)x + 4 \\ \underline{-ax^2 - ax} \\ 4x + 4 \\ \underline{-4x - 4} \\ 0 \end{array}$$

$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+4)x + 4 = (x+1)(x^2 + ax + 4)$$

برای اینکه معادله دارای سه ریشه حقیقی منفی باشد، باید معادله درجه دوم $x^2 + ax + 4$ دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد؛ یعنی به‌صورت زیر باشد.



$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب} > 0 \\ \text{مجموع ریشه‌ها} < 0 \Rightarrow \frac{-a}{1} < 0 \\ \Delta > 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 & (1) \\ \begin{cases} a > 4 \\ \text{یا} \\ a < -4 \end{cases} & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} a > 4$$

اما توجه کنید چون در صورت سؤال گفته سه ریشه متمایز، پس $x = -1$ نباید ریشه $x^2 + ax + 4$ باشد؛ پس $-1 - a + 4 = 0$ یعنی a نباید 3 باشد، زیرا اگر $a = 3$ باشد، داریم:

$$(x+1)(x^2 + 3x + 4) = (x+1)(x+1)(x+4)$$

در این صورت معادله دارای ریشه مضاعف (-1) و ریشه ساده -4 خواهد بود؛ پس جواب به‌صورت $\{3, +\infty\} - \{5\}$ خواهد بود.

از آنجا که α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 7x - 3 = 0$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{1}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1}$$

حالا برای پیدا کردن a در معادله $x^2 + ax + b = 0$ ، کافی است جمع ریشه‌ها را در این معادله به دست آوریم:

$$S = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta) = (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) + (\alpha + \beta) = (\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)$$

$$\xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{-7}{1}} \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{-3}{1}} 1 \left(\left(\frac{-7}{1} \right)^2 - 2 \left(\frac{-3}{1} \right) \right) + 1 \left(\frac{-7}{1} \right) + 1$$

$$= 1 \left(\frac{49}{1} + \frac{6}{1} \right) - 7 + 1 = \frac{49}{1} + 6 - 7 + 1 = \frac{49}{1}$$

از طرفی می‌دانیم که جمع ریشه‌ها در معادله $x^2 + ax + b = 0$ برابر است با $-\frac{a}{1}$ ، پس:

$$\frac{a}{1} = \frac{49}{1} \Rightarrow a = \frac{49}{1} = 49/1$$

اگر ریشه‌های معادله $x^2 + x + m = 0$ را $x' = \alpha - 1$ و $x'' = \beta - 1$ فرض کنیم؛ آنگاه ضرب ریشه‌ها برابر با $P = \frac{c}{a} = m$ خواهد بود. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} x'.x'' = (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \\ x'.x'' = \frac{c}{a} = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$$

چون α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ هستند؛ پس $\alpha + \beta = \frac{1}{1} = 1$ و $\alpha\beta = \frac{-2}{1} = -2$ بنابراین داریم:

$$m = 1(-2) - 1 + 1 = -2$$

باتوجه به اینکه $a + 2b + c < 0$ است، پس $f(2) < 0$ است، از طرفی چون $b^2 < 4ac$ است، در نتیجه $b^2 - 4ac < 0$ و نهایتاً $\Delta < 0$ خواهد بود، پس سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند و دهانه آن رو به پایین است و در نتیجه $a < 0$ و $c < 0$ خواهد بود.

$$a < 0, c < 0 \Rightarrow ac > 0$$

اول: معادله دارای دو ریشهٔ قرینه و حقیقی است، پس $-\frac{b}{a} = 0$ و $\Delta > 0$ می‌باشد.

$$-\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow k(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1$$

دوم: $k = 0$ قابل قبول نیست؛ زیرا ضریب x^2 صفر می‌شود و معادله درجهٔ دو نخواهد بود.
 $k = 1$ قابل قبول نیست؛ زیرا در این صورت معادله جواب ندارد.

$$k = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

اگر $k = -1$ باشد، معادله دو جواب قرینه دارد.

$$k = -1 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Delta > 0 : ۳۶ - ۴(۲m - ۱)(m - ۲) > 0$$

$$۹ - (۲m^۲ - ۴m - m + ۲) > 0$$

$$-۲m^۲ + ۵m + ۷ > 0$$

$$۲m^۲ - ۵m - ۷ < 0$$

m	$-\infty$	-۱	$\frac{۷}{۲}$	$+\infty$
$۲m^۲ - ۵m - ۷$	+	۰	-	+

$\hat{c}$

$-1 < m < \frac{۷}{۲}$

برای تعیین k ، باید مجموع ریشه‌های معادله $۴x^۲ + kx + ۱ = 0$ یعنی مجموع $\frac{۱}{\alpha} + \beta + ۱$ و $\frac{۱}{\beta} + \alpha + ۱$ را محاسبه کرده و برابر $-\frac{k}{۴}$ قرار دهیم. داریم:

$$x = ۴ - ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۴ = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-1}{۲} \\ P = -۲ \end{cases}$$

$$S_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} + \beta + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + \alpha + 1\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + ۲ = S + \frac{S}{P} + ۲$$

$$\frac{S = -\frac{1}{2}}{P = -۲} \rightarrow -\frac{1}{۲} + \frac{-\frac{1}{2}}{-۲} + ۲ = -\frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} + ۲ = \frac{۷}{۴}$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}} = \frac{۷}{۴} \xrightarrow{\text{معادله جدید}} ۴x^۲ + kx + ۱ = 0$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}} = -\frac{k}{۴} \xrightarrow{S_{\text{جدید}} = \frac{۷}{۴}} -\frac{k}{۴} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow k = -۷$$

معادله درجه دومی که دلتای آن مثبت باشد دو ریشه حقیقی دارد.

$$x^۲ + ۳x + ۱ = 0 \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۴ = ۵ > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه حقیقی دارد}$$

سایر معادلات ریشه حقیقی ندارند.

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{۳} \quad , \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{۳}$$

$$\text{عبارت} = \alpha^۲\beta + \alpha\beta^۲ = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \cdot S = \frac{1}{۳} \times \frac{-1}{۳} = \frac{-1}{۹}$$

ابتدا ضابطه تابع درجه دوم f را با داشتن مختصات رأس آن $(B(۲, ۵))$ می نویسیم. داریم:

$$f(x) = a(x - ۲)^۲ + ۵ \Rightarrow f(x) = a(x - ۲)^۲ + ۵$$

چون مثلث ABC در رأس A قائمه است، پس باید شیب ضلع AB و AC را محاسبه کرده و ضرب آن‌ها را برابر -۱ قرار دهیم. برای این منظور ابتدا مختصات رئوس A ، B و C را مشخص می‌نماییم. داریم:

$$f(x) = a(x - ۲)^۲ + ۵ \xrightarrow{x=۰} A(۰, ۴a + ۵), B(۲, ۵), C(۲, ۰)$$

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{۴a + ۵ - ۵}{۰ - ۲} = -۲a \\ m_{AC} = \frac{۴a + ۵ - ۰}{۰ - ۲} = \frac{۴a + ۵}{-۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow -2a \times \frac{4a+5}{-2} = -1 \Rightarrow 4a^2 + 5a = -1$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 5a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow f(x) = -(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow f(5) = -4 \\ a = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow f(5) = \frac{-9}{4} + 5 = \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{در گزینه‌ها نیست}$$

معادله سهمی به صورت $y = a(x - ۲)^۲ + ۱$ است و چون $f(۰) = ۴$ است پس:

$$a(۰ - ۲)^۲ + ۱ = ۴ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴} \Rightarrow y = \frac{۳}{۴}(x - ۲)^۲ + ۱ = \frac{۳}{۴}x^۲ - ۳x + ۴$$

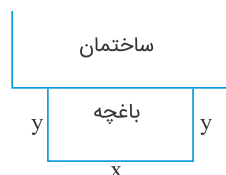
نقطه M روی سهمی است پس همواره به صورت $M(x, \frac{۳}{۴}x^۲ - ۳x + ۴)$ می‌باشد. محیط مستطیل را L در نظر می‌گیریم.

$$L = ۲(x + \frac{۳}{۴}x^۲ - ۳x + ۴) = \frac{۳}{۲}x^۲ - ۴x + ۸$$

حداقل L برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ است.

$$\min(L) = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(۱۶ - ۴۸)}{۶} = \frac{۱۶}{۳}$$

برای اینکه اطلاعات مسئله بهتر درک شود، شکل آن را رسم می‌کنیم:



$$x + ۲y = ۲۰$$

بیشترین مساحت باغچه را به روش تستی محاسبه می‌کنیم.

$$x = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰, ۲y = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰ \Rightarrow y = ۵$$

$$\text{مساحت باغچه} = \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow S_{\max} = ۱۰ \times ۵ = ۵۰$$

با فرض $t = x^2$ معادله داده شده به صورت $t^2 + mt - (m - 3) = 0$ خواهد بود، پس اگر معادله برحسب t دارای یک ریشه مضاعف باشد، آنگاه برحسب x دارای دو ریشه مضاعف خواهد بود، داریم:

$$t^2 + mt - m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (m)^2 - 4(1)(-m + 3) = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (m + 6)(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m=2} t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t + 1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$\xrightarrow{m=-6} t^2 - 6t - (-9) = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$$

پس به ازای $m = -6$ تابع دارای دو ریشه مضاعف $\pm\sqrt{3}$ است.

$$x^2 - 2x - 1 = 0 : S = \alpha + \beta = 2, P = \alpha \cdot \beta = -1$$

ریشه اول معادله جدید:

$$x_1 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 4 - 2(-1) = 6$$

ریشه دوم معادله جدید:

$$x_2 = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta \cdot (\alpha + \beta) = P \cdot S = (-1)(2) = -2$$

$$S_1 = x_1 + x_2 = 6 + (-2) = 4$$

$$P_1 = x_1 \times x_2 = 6(-2) = -12$$

$$x^2 - S_1x + P_1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$