



گزینه ۲

۱

الف) نادرست است، شیب منحنی در A ، B و E مثبت است، بنابراین در ۳ نقطه شیب مثبت داریم.

ب) درست است.

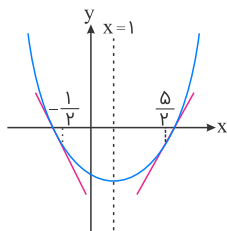
ج) مقدار مشتق از A به B و C در حال کاهش است ولی از C به D زیاد می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود، پس نادرست است.

د) درست است، منفی‌ترین شیب بین نقاط مشخص شده مربوط به C است.

گزینه ۳

۲

در تابع درجه دو، نقاطی که نسبت به محور تقارن سهمی (خط $x = -\frac{b}{2a}$) قرینه‌اند، مشتقشان قرینه هم است. در تابع $f(x) = x^2 - 2x - 2$ ، معادله محور تقارن، خط $x = 1$ است؛ پس باید دنبال اعدادی باشیم که میانگینشان ۱ می‌شود. این ویژگی فقط در اعداد گزینه (۳) وجود دارد.



گزینه ۳

۳

باتوجه به تعریف مشتق تابع $y = g(x)$ در نقطه معلوم $x = 2$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} g'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(x) - 0}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \times \lim_{x \rightarrow 2} ([x] + [-x]) = 4(-1) = -4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} f(x) = -1 \text{ بنابراین } f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ دقت کنید:}$$

گزینه ۲

۴

$$f'(2) = -f'(1)$$

می‌دانیم که در سهمی $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ، شیب خطوط مماس بر نمودار آن در نقاط با عرض یکسان قرینه یکدیگر هستند؛ بنابراین این نقاط نسبت به محور تقارن سهمی متقارن هستند. حال اگر طول این نقاط را α و β بنامیم داریم:

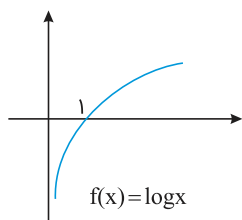
$$\alpha + \beta = -\frac{B}{A}$$

در این سؤال داریم:

$$2 + 1 = a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 10x + b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x + b + 16 - 40 - b}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x - 24}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)(x - 6)}{x - 4} = 2 \end{aligned}$$

روی تابع $\log x$ هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که مماس در آن‌ها موازی محور x ها باشد. (نمودار آن را ببینید)



راه‌حل اول:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(w + wh) - f'(w - wh)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(w + wh) - f(w - wh)}{h} \times \frac{f(w + wh) + f(w - wh)}{1} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(w + wh) - f(w - wh)}{h} \right) \times \lim_{h \rightarrow 0} (f(w + wh) + f(w - wh)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(w + wh) - f(w - wh) + f(w) - f(w)}{h} \right) \times (f(w) + f(w)) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w + wh) - f(w)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w - wh) - f(w)}{h} \right) \times 2f(w) \\ &= (w \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w + wh) - f(w)}{wh} - (-w) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w - wh) - f(w)}{-wh}) \times 2f(w) \\ &= (wf'(w) - (-w)f'(w)) \times 2f(w) = 10f'(w)f(w) = 10 \times 3 \times 4 = 120 \end{aligned}$$

راه‌حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + mh) - f(a - nh)}{kh} = \left(\frac{m - n}{k} \right) f'(a)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w + wh) - f(w - wh)}{h} &\times \lim_{h \rightarrow 0} (f(w + wh) + f(w - wh)) \\ &= \left(\frac{w - (-w)}{1} \right) f'(w) \times 2f(w) = 10f'(w)f(w) = 10 \times 3 \times 4 = 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{F\left(\frac{1}{x}\right) - F\left(\frac{1}{t}\right)}{x - t} &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t} - t} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{t}} \left(-\frac{t}{1}\right) \lim_{t \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{t}\right)}{t - \frac{1}{t}} = -\frac{1}{4} F'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \Rightarrow F'\left(\frac{1}{4}\right) = -16 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = \frac{f'(1)}{1}$$

برای اینکه حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$ موجود باشد، باید $f'(1) = 0$ باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \overbrace{f(1)}^0}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1}$$

باتوجه به تعریف مشتق داریم:

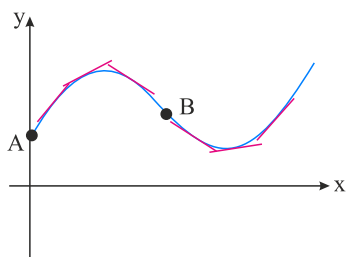
$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow f'(1) = -1$$

حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -2f'(1) = -2 \times (-1) = 2$$

باتوجه به شکل مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شیب خط مماس است از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - 1}{\underbrace{(\sqrt{f(x)} + 1)}_2 \underbrace{(x)}_3 (x - 9)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \frac{f'(9)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = f(x+3) \Rightarrow \begin{cases} f(6+h) = f(6+h+3) = f(9+h) \\ f(6) = f(6+3) = f(9) \\ f(9) = f(9+3) = f(12) \end{cases} \Rightarrow f(12) = f(6)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(12)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = f'(6)$$

معادله خط d را می‌یابیم:

$$d \text{ شیب خط } = m_d = \frac{0 - 4}{12 - 0} = -\frac{1}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 12) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 4$$

مقدار تابع $g(x)$ در $x = 3$ با مقدار $y = -\frac{1}{3}x + 4$ در $x = 3$ برابر است، یعنی:

$$g(3) = -\frac{1}{3} \times 3 + 4 = 3 \Rightarrow g(3) = 3$$

همچنین شیب خط مماس بر $g(x)$ در $x = 3$ با شیب خط d برابر است، یعنی:

$$g'(3) = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g'(x) - g'(3) + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g(x) - 3)(g(x) - 4)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{g(x) - g(3)}{x - 3} \right) \times \lim_{x \rightarrow 3} (g(x) - 4)$$

$$= g'(3) \times (g(3) - 4) = -\frac{1}{3} \times (3 - 4) = \frac{1}{3}$$

مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S = \frac{OA \cdot OB}{2} \Rightarrow 5 = \frac{5 \times OB}{2} \Rightarrow OB = 2$$

پس مختصات نقاط A و B برابر است با:

$$A(5, 0), B(0, 2)$$

شیب خط AB برابر است با:

$$m = \frac{2 - 0}{0 - 5} = -\frac{2}{5}$$

که برابر است با مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ یعنی: $f'(2) = -\frac{2}{5}$
برای محاسبه حد خواسته شده آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2 - 3h)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 - 3h) - f(2)}{-3h} \times \frac{-(-3)}{3} = \frac{3}{3} f'(2) \\ &= \frac{3}{3} \times \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

چون $f(x)$ عامل $x - 2$ دارد پس:

$$f(x) = \frac{(x - 2)(2x - 1)}{\sqrt{2x}} = (x - 2) \times \frac{2x - 1}{\sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{-(x - 2)} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{\sqrt{2x}} = -\frac{3}{2}$$

از گفته سؤال می‌فهمیم که: $f'(1) = 4$

حد داده‌شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h^2 - 2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h(h-2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-2} = (-1-1)f'(1) \times \frac{1}{-2} = f'(1) = 4\end{aligned}$$

نکته: اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+nh) - f(a+mh)}{h} = (n-m)f'(a)$$

می‌دانیم در تابع درجه دوم مقدار مشتق در رأس سهمی صفر است و چون عرض این نقطه هم صفر شده است، یعنی سهمی بر محور طول‌ها مماس است و طول رأس آن $2b - 1$ است؛ پس:

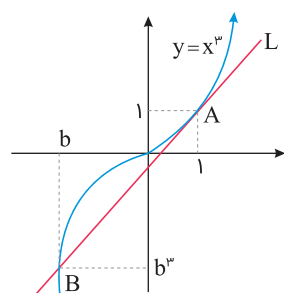
$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= (x - (2b - 1))^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} (2b - 1)^2 = b \Rightarrow 4b^2 - 4b + 1 = b \Rightarrow 4b^2 - 5b + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \\ a = -2(2b - 1) \end{cases} \\ \begin{cases} b = 1 \Rightarrow a = -2 \\ b = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر ممکن برای } a = -2 + 1 = -1\end{aligned}$$

شیب خط L را حساب می‌کنیم:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

مختصات نقطه B به صورت (b, b^3) است، پس:

$$\begin{aligned}m_{AB} = 3 &\Rightarrow \frac{b^3 - 1}{b - 1} = 3 \Rightarrow b^3 + b + 1 = 3 \Rightarrow b^3 + b - 2 = 0 \\ &\xrightarrow{b < 0} b = -2\end{aligned}$$



خط مماس بر تابع f در نقطه $x = ۲$ ، از دو نقطه $A(۲, ۳)$ و $B(۰, \frac{۳}{۴})$ می‌گذرد. شیب این خط را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{۳}{۴} - ۳}{۰ - ۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۳}{۴}$$

حالا حاصل حد داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f^۲(x) - ۳f(x)}{x^۲ - ۳x + ۲} &= \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x)(\overbrace{f(x) - ۳}^{f(۲)})}{(x-1)(x-۲)} = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} \times \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x)}{x - 1} \\ &= f'(۲) \times \frac{f(۲)}{۲ - 1} = \frac{۳}{۴} \times ۳ = \frac{۹}{۴} \end{aligned}$$

اگر حد را مرتب کنیم، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + ۲h) - f(1)}{۲h} \times \frac{۲}{1} = ۶ \Rightarrow ۲f'(1) = ۶ \Rightarrow f'(1) = ۳$$

یعنی شیب خط مماس بر منحنی f برابر با ۳ است و شیب خط $y = x$ نیز برابر با ۱ است؛ بنابراین m یعنی شیب خط $y = mx$ عددی بین ۱ و ۳ است.

تابع $f(x)$ یک تابع خطی با شیب $\tan ۴۵^\circ = ۱$ می‌باشد، پس $f'(x) = ۱$ است. بنابراین گزینه "۱" صحیح می‌باشد.

شیب خط مماس در هر نقطه روی نمودار بیانگر مشتق تابع در آن نقطه است.

مشتق تابع f در نقاط B و E عددی مثبت است؛ چراکه شیب در این نقاط مثبت است.

اندازه شیب خط در نقطه C از D بزرگتر است و چون هر دو شیب‌های منفی دارند، پس C کمترین مقدار مشتق را بین نقاط داده‌شده دارد.

راه حل اول:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - ۳h) - f(x + ۲h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - ۳h) - f(x + ۲h) + f(x) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - ۳h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ۲h) - f(x)}{h} \\ &= -۳ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - ۳h) - f(x)}{-۳h} - ۲ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ۲h) - f(x)}{۲h} = -۳f'(x) - ۲f'(x) \\ &= -۵f'(x) \Rightarrow -۵f'(x) = ۵\sqrt{x} + ۵ \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{x} - ۱ \Rightarrow f'(۴) = -۳ \end{aligned}$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + mh) - f(x + nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k}\right)f'(x)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - ۳h) - f(x + ۲h)}{h} &= \left(\frac{-۳ - ۲}{1}\right)f'(x) = -۵f'(x) \\ -۵f'(x) &= ۵\sqrt{x} + ۵ \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{x} - ۱ \Rightarrow f'(۴) = -۳ \end{aligned}$$

شیب خط مماس در نقاط A ، B و C به ترتیب منفی، صفر و مثبت است، اما دقت کنید که اندازه شیب در نقطه A از اندازه شیب در نقطه C بیش‌تر است، پس $|f'(x_A)| > f'(x_C)$ است.

ابتدا عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{1 - (-1)}{1} \times f'(x) = 2f'(x)$$

$$\Rightarrow 2f'(x) = x^r + rx \Rightarrow f'(x) = \frac{x^r}{2} + x$$

$$\Rightarrow f'(r) = \frac{r^r}{2} + r = 12$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^r - rx + r)\sqrt{x+r} - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-r)\sqrt{x+r}}{\cancel{x-1}} = (1-r)(r) = -r, \quad A(1, 0)$$

$$y - 0 = -r(x - 1) \Rightarrow y = -rx + r$$

عرض از مبدأ: ۴

بررسی موارد:

الف) شیب در نقاط A و B منفی است و $|m_B| > |m_A|$ ، پس $m_B < m_A$.

ب) شیب در نقطه A منفی و در نقطه C مثبت است و $|m_A| < |m_C|$. بنابراین $m_A + m_C > 0$.

پ) شیب در نقطه D مثبت و در نقطه B منفی است، پس $m_D > m_B$.

ت) باتوجه به اینکه $|m_D| < |m_B|$ ، پس $|m_D| - |m_B| < 0$.

بنابراین فقط مورد "پ" صحیح است.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه "۱": به ازای $x > 0 \leftarrow x > 0$ و $f'(x) > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow x < 0$ و $f'(x) < 0$ ؛ پس برابر نیست.

گزینه "۲": به ازای $x > 0 \leftarrow x > 0$ و $f'(x) > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow x < 0$ و $f'(x) > 0$ ؛ پس برابر نیست.

گزینه "۳": به ازای $x > 0 \leftarrow x > 0$ و $f'(x) > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow x < 0$ و $f'(x) > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

گزینه "۴": به ازای $x > 0 \leftarrow x > 0$ و $f'(x) > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow x < 0$ و $f'(x) > 0$ ؛ پس برابر نیست.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)g(1) - f(1+h)g(1+h)}{3h^2 - 2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{h(3h - 2)}$$

حد عبارت $(3h - 2)$ وقتی $h \rightarrow 0$ برابر -2 است، لذا:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{h(3h - 2)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{-2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1)}{h} = \frac{1}{2} (fg)'(1) \end{aligned}$$

می‌دانیم $f'(x) = 2x^2 = f'(x)$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x^2$ است. حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\underbrace{\frac{x - 2}{f(x) - f(2)}}_{f'(2)} \times (x + 2) \right) = \frac{4}{f'(2)}$$

$$f'(x) = 2x^2 \xrightarrow{x=2} f'(2) = 2(4) = 8$$

ما حاصل $\frac{4}{f'(2)}$ را می‌خواهیم که برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

در تابع درجه دوم نقاط متقارن نسبت به محور تقارن تابع دارای شیب قرینه‌اند، پس $x = 5$ و $x = -1$ نسبت به محور تقارن قرینه‌اند؛ یعنی محور تقارن تابع $y = \frac{5-1}{2}$ است. از ضابطه تابع هم محور تقارن آن است:

$$\frac{-a}{-2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

می‌دانیم شیب خط مماس بر تابع درجه دوم در رأس آن صفر است، پس: $\alpha = 2$. $f(\alpha)$ برابر است با:

$$f(\alpha) = f(2) = -x^2 + 4x \xrightarrow{x=2} f(2) = -4 + 8 = 4$$