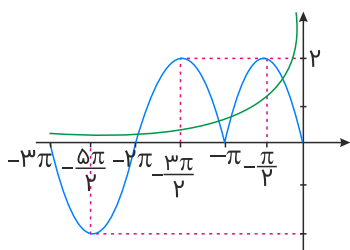


گزینه ۴

۱

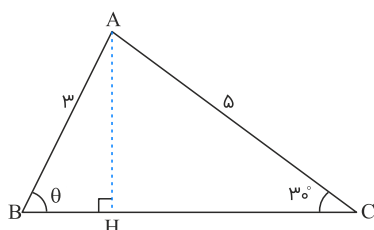
مطابق شکل نمودار دو تابع در چهار نقطه متقاطع‌اند.



گزینه ۴

۲

اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، در این صورت خواهیم داشت:



$$\triangle AHC : \sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \frac{5}{2}$$

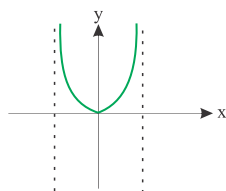
$$\triangle AHB : \sin \theta = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

گزینه ۲

۳

$$2x^2 - (k^2 - 4)x + k = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{k^2 - 4}{2}$$

تابع $y = |\tan x|$ را در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ رسم می‌کنیم:فقط خط $y = 0$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس:

$$y = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{k^2 - 4}{4} = 0 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$k = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \Rightarrow \text{غ.ق.}$$

$$k = -2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \text{دو ریشه} \Rightarrow \text{ق.ق.}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} = 1 \xrightarrow{\text{توان } ۲} \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{\text{توان } ۲} 1 - \sin ۲\alpha = \underbrace{(\sin \alpha \cos \alpha)}_{\frac{1}{۲} \sin ۲\alpha}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin ۲\alpha = \frac{1}{۲} \sin ۲\alpha \xrightarrow{\times ۲} \sin ۲\alpha + ۲ \sin ۲\alpha - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin ۲\alpha = \frac{-۲ \pm \sqrt{۱۶ + ۱۶}}{۲} = -۲ \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \sin ۲\alpha = -۲ + ۲\sqrt{۲}$$

$$\frac{۲ \sin \alpha - ۳ \cos \alpha}{۳ \sin \alpha + ۴ \cos \alpha} = ۳ \Rightarrow ۲ \sin \alpha - ۳ \cos \alpha = ۹ \sin \alpha + ۱۲ \cos \alpha$$

$$۱۵ \cos \alpha = -۵ \sin \alpha \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{۱۵}{-۵} = -۳ \Rightarrow \tan \alpha = -۳ \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{1}{۳}$$

$$\frac{۲}{\sin ۲\alpha} = ۲ \left(\frac{1}{\sin ۲\alpha} \right) = ۲ \left(1 + \cot ۲\alpha \right) = ۲ \left(1 + \frac{1}{۹} \right) = \frac{۲۰}{۹}$$

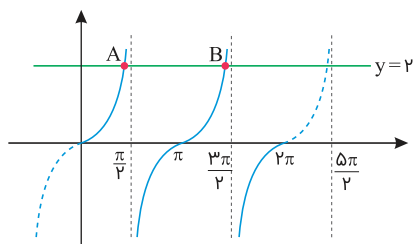
می‌دانیم $\frac{۱۲۵\pi}{۴} = ۳۱\pi + \frac{\pi}{۴}$ است:

$$۲ \cos\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right) + ۳ \tan\left(\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right) = ۲ \cos\left(۳۱\pi + \frac{\pi}{۴}\right) + ۳ \tan\left(۳۱\pi + \frac{\pi}{۴}\right)$$

$$= -۲ \cos \frac{\pi}{۴} + ۳ \tan \frac{\pi}{۴} = -۲ \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} \right) + ۳(۱) = ۳ - \sqrt{۲}$$

$$۳ \sin x - ۶ \cos x = ۰ \Rightarrow ۳ \sin x = ۶ \cos x \Rightarrow \tan x = ۲$$

ما نمودار $y = \tan x$ را می‌توانیم رسم کنیم. مطابق شکل در فاصله $[۰, ۲\pi]$ ، ۲ بار برابر ۲ است.



می‌دانیم: $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$

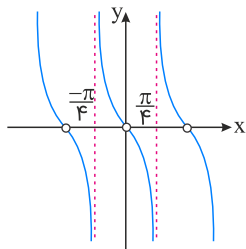
$$\Rightarrow \frac{2}{\tan x - \cot x} = \frac{2}{-2 \cot 2x} = \frac{-1}{\cot 2x} = -\tan 2x$$

دوره تناوب $y = -\tan 2x$ برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$$

همچنین دقت کنید که $\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$ به ازای $x = \frac{k\pi}{2}$ تعریف نمی‌شود.

برای رسم تابع $y = -\tan 2x$ ابتدا تابع $\tan 2x$ را رسم می‌کنیم و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.



$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan x + \cot x} = \sin x \times \cos x$$

$$\frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^3 x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin^3 x(1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\xrightarrow{\sin x \neq 0} \frac{\sin^3 x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \sin x(1 + \cos x) = \sin x + \sin x \cos x$$

$$\frac{1}{\tan x + \cot x} - \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} = \sin x \cos x - \sin x - \sin x \cos x = -\sin x$$

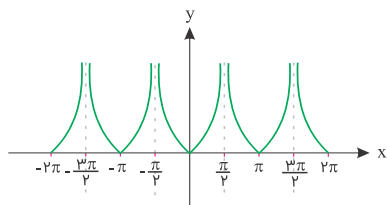
اگر دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر T باشد. دوره تناوب $f(ax)$ برابر $\frac{T}{|a|}$ است. اگر دوره تناوب تابعی T باشد، در اثر انتقال افقی و عمودی دوره تناوب تغییر نمی‌کند.

در تابع $y = \frac{-1}{4}f(4x) - 3$ ، عضوهای دامنه با ضریب ۴ منقبض می‌شود. به عبارتی طول عضوهای دامنه $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. پس دوره تناوب هم $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

$$T_4 = \frac{T_1}{|a|} = \frac{4}{4}$$

$$y = |\sin x| \sqrt{1 + \tan^v x} = |\sin x| \sqrt{\frac{1}{\cos^v x}}$$

$$= |\sin x| \times \frac{1}{|\cos x|} = \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| = |\tan x|$$



باتوجه به شکل گزینه (۲) صحیح است.

$$\sin \theta \left(\sin \theta + \frac{\frac{\cos \theta}{\frac{1}{\sin \theta}}}{\frac{\cos \theta}{\frac{1}{\sin \theta}}} \right) = \sin \theta \left(\sin \theta + \frac{\cos^v \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \sin \theta \left(\frac{\sin^v \theta + \cos^v \theta}{\sin \theta} \right) = \sin \theta \times \frac{1}{\sin \theta} = 1$$

ابتدا تابع را ساده تر می کنیم:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\cos x$$

$$y = \underbrace{f \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)}_{-\cos x} + k = -f \sin x \cos x + k$$

می دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, پس داریم:

$$y = -f \sin x \cos x + k = -\underbrace{2 \left(\frac{f}{2} \sin x \cos x \right)}_{\sin 2x} + k = -\frac{f}{2} \sin 2x + k$$

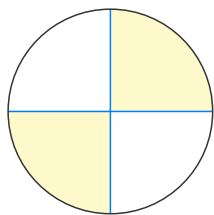
در تابع $y = a \sin(bx) + c$, $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ است.

$$y = -\frac{f}{2} \sin 2x + k \Rightarrow \begin{cases} \max = |-f/2| + k = f/2 + k \\ \min = -|-f/2| + k = -f/2 + k \end{cases}$$

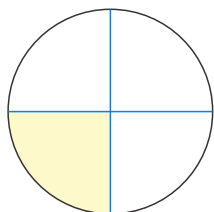
باتوجه به این که ماکزیمم دو برابر مینیمم است، داریم:

$$f/2 + k = 2(-f/2 + k) = -f + 2k \Rightarrow k = f$$

$\sin \alpha \cos \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هم‌علامت‌اند



$\sin \alpha + \cos \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha$ و $\cos \alpha$ منفی‌اند



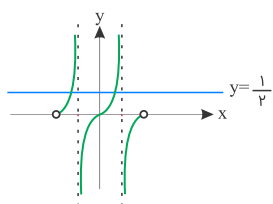
$$\tan \hat{D}\hat{A}\hat{H} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{D}\hat{A}\hat{H} = 30^\circ$$

$$\tan \hat{B}\hat{D}\hat{H} = \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\tan 49^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}} \hat{B}\hat{D}\hat{H} = 49^\circ \Rightarrow \hat{B} = 49^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (90^\circ + 49^\circ) = 41^\circ \xrightarrow{\hat{D}\hat{A}\hat{H}=30^\circ} \hat{C}\hat{A}\hat{D} = 19^\circ$$

$$AD = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow CD = AD \sin 19^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{32}{100} = 2\sqrt{3} \times \frac{8}{25} = \frac{16\sqrt{3}}{25} \Rightarrow 25CD = 16\sqrt{3}$$

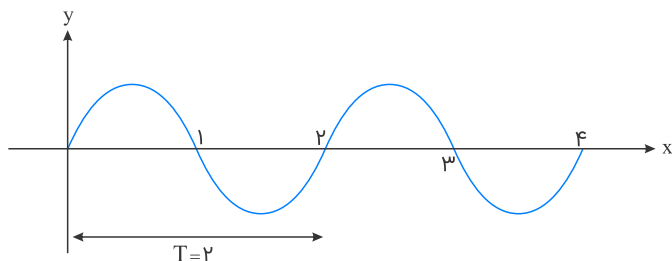


$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sin(\pi x)$$

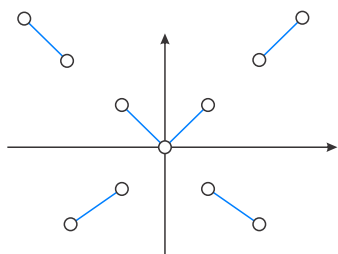
$$f(g(x)) = f(\sin(\pi x)) = \begin{cases} 1 & ; \sin(\pi x) > 0 \\ -1 & ; \sin(\pi x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = xf(g(x)) = \begin{cases} x & ; \sin(\pi x) > 0 \\ -x & ; \sin(\pi x) < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع $y = \sin(\pi x)$ به صورت زیر است:



پس نمودار تابع به صورت زیر می‌شود:



$$x + \frac{\pi}{V} - (x - \frac{\Delta\pi}{14}) = \frac{\pi}{V} + \frac{\Delta\pi}{14} = \frac{\pi}{V}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\Delta\pi}{14} = (x + \frac{\pi}{V}) - \frac{\pi}{V}$$

$$\Rightarrow \cos^V(x + \frac{\pi}{V}) + V\cos^V(-\frac{\pi}{V} + (x + \frac{\pi}{V})) = V$$

$$\Rightarrow \cos^V(x + \frac{\pi}{V}) + V\sin^V(x + \frac{\pi}{V}) = V$$

$$\Rightarrow \cos^V(x + \frac{\pi}{V}) + V - V\cos^V(x + \frac{\pi}{V}) = V$$

$$\Rightarrow \cos^V(x + \frac{\pi}{V}) = 0 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{V}) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{V} = k\pi + \frac{\pi}{V} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\Delta\pi}{14}$$

$$[-\sin(-60^\circ)] = [-\sin(-360^\circ - 240^\circ)] = [\sin 240^\circ] = [\sin(180^\circ + 60^\circ)]$$

$$= [-\sin 60^\circ] = [-\frac{\sqrt{3}}{2}] = -1$$

$$[-\cos(-105^\circ)] = [-\cos(-2 \times 360^\circ - 330^\circ)] = [-\cos 330^\circ]$$

$$= [-\cos(360^\circ - 30^\circ)] = [-\cos 30^\circ] = [-\frac{\sqrt{3}}{2}] = -1$$

$$\text{عبارت حاصل} = (-1) - (-1) = 0$$

نکته: تابع $y = \tan x$ دارای دوره تناوب π است و باتوجه به اینکه $y = \tan ax$ دچار انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{a}$ می‌شود، در نتیجه دوره تناوب $y = \tan ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

نکته: بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع تناوبت اکیداً یکنوا است، همان طول دوره تناوب است.

در این سؤال طول بازه برابر $\frac{1}{\sqrt{b}} - (-\frac{1}{\sqrt{b}})$ یعنی $\frac{2}{\sqrt{b}}$ است؛ پس:

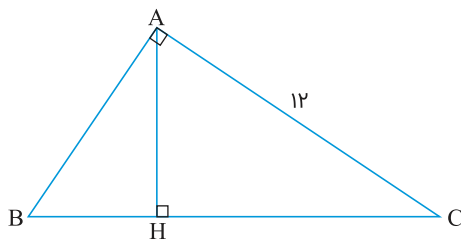
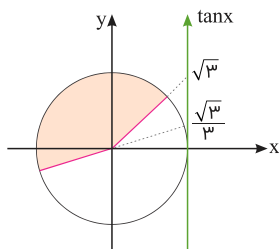
$$\frac{\pi}{b} = \frac{1}{\sqrt{b}} \Rightarrow \sqrt{b} = \pi \Rightarrow b = \pi^2$$

نکته: تابع $y = a \cos bx + c$ دارای دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$f(x) = 2 - \cos 3x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

از روی دایره مثلثاتی واضح است که مقادیر $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ را نمی‌پذیرد.



$$\triangle ABC : \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AB}{12} \Rightarrow AB = 9$$

ازطرفی چون $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ است، پس $\tan \hat{C} = \cot \hat{B} = \frac{3}{4}$ می‌باشد.

اگر $\cot \hat{B} = \frac{3}{4}$ باشد، $\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$ است.

$$\triangle ABH : \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{BH}{9} \Rightarrow BH = \frac{36}{5} = 7.2$$

$$\begin{aligned} A &= \sin^{\circ} \alpha (\tan^{\circ} \alpha - \cot^{\circ} \alpha) \cdot \cos^{\circ} \alpha = \sin^{\circ} \alpha \cdot \cos^{\circ} \alpha \left(\frac{\sin^{\circ} \alpha}{\cos^{\circ} \alpha} - \frac{\cos^{\circ} \alpha}{\sin^{\circ} \alpha} \right) \\ &= \sin^{\circ} \alpha - \cos^{\circ} \alpha = \sin^{\circ} \alpha - \cos^{\circ} \alpha = (1 - \cos^{\circ} \alpha) - \cos^{\circ} \alpha = 1 - 2\cos^{\circ} \alpha \end{aligned}$$

باتوجه به شکل، نقطه A دومین ماکزیمم با طول مثبت تابع ذکرشده است. اولین ماکزیمم این تابع وقتی است که کمان سینوس برابر $\frac{\pi}{3}$ و دومین آن زمانی است که:

$$2x - \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow A\left(\frac{4\pi}{3}, 4\right)$$

برای تعیین نقطه B، به سادگی باید معادله خط افقی رسم شده را پیدا کنیم. کافی است قرار دهیم $x = 0$:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 + 3 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 0 \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

مختصات نقطه B برابر است با: $(\pi, -\frac{1}{2})$ و طول AC برابر است با: $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
طول BC برابر است با $\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = -\pi$ ، پس:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$$

در صورت، به جای $x - \frac{3\pi}{10}$ ، می نویسیم $(\frac{\pi}{5} + x) - \frac{\pi}{2}$:

$$\cos^{\circ}\left(\frac{\pi}{5} + x\right) + \cos^{\circ}\left(\frac{3\pi}{10} - x\right) = \cos^{\circ}\left(\frac{\pi}{5} + x\right) + \cos^{\circ}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{5} + x\right)\right)$$

$$= \cos^{\circ}\left(\frac{\pi}{5} + x\right) + \sin^{\circ}\left(\frac{\pi}{5} + x\right) = 1$$

در مخرج به جای $x + \frac{7\pi}{10}$ ، می نویسیم $(\frac{\pi}{5} + x) + \frac{3\pi}{10}$:

$$\cot\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \times \cot\left(\frac{7\pi}{10} + x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \times \cot\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{5} + x\right)\right)$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \times -\tan\left(\frac{\pi}{5} + x\right) = -1$$

$$\text{حاصل کسر} = \frac{1}{-1} = -1$$

می‌دانیم $\sin \varphi \alpha = \varphi \sin \alpha \cos \alpha$:

$$\sin \varphi \alpha = \varphi \sin \varphi \alpha \cos \varphi \alpha = \sqrt{\omega} \sin \varphi \alpha$$

$$\varphi \sin \varphi \alpha \cos \varphi \alpha - \sqrt{\omega} \sin \varphi \alpha = 0$$

$$\sin \varphi \alpha \left(\varphi \cos \varphi \alpha - \sqrt{\omega} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi \alpha = \frac{\sqrt{\omega}}{\varphi} \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \text{غ.ق.ق} \\ \sin \varphi \alpha = 0 \Rightarrow \varphi \alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{\varphi} \xrightarrow{\alpha \in [0, \pi]} \alpha = 0, \frac{\pi}{\varphi}, \frac{\varphi\pi}{\varphi}, \pi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع}} \varphi\pi$$

$$\tan 1091^\circ = \tan(\varphi \times 180^\circ + 11^\circ) = \tan 11^\circ$$

$$\tan 281^\circ = \tan(270^\circ + 11^\circ) = -\cot 11^\circ$$

$$\sin 202^\circ = \sin(180^\circ + 22^\circ) = -\sin 22^\circ$$

$$\tan 281^\circ + \tan 1091^\circ \simeq -\omega \Rightarrow \tan 11^\circ - \cot 11^\circ \simeq -\omega$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} \tan^2 11^\circ + \cot^2 11^\circ - \underbrace{\varphi \tan 11^\circ \cot 11^\circ}_1 \simeq 2\omega$$

$$\Rightarrow \tan^2 11^\circ + \cot^2 11^\circ \simeq 2\varphi$$

باتوجه به رابطه $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ و $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$\varphi + \tan^2 11^\circ + \cot^2 11^\circ = \frac{1}{\sin^2 11^\circ \cos^2 11^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi} \sin^2 \varphi 11^\circ}$$

$$\Rightarrow \varphi \simeq \frac{1}{\frac{1}{\varphi} \sin^2 \varphi 11^\circ} \Rightarrow \sin^2 \varphi 11^\circ \simeq \frac{\varphi}{\varphi^2}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi 11^\circ \simeq \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2}} \Rightarrow \sin 202^\circ \simeq -\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2}}$$

$$\varphi \sin^2 x - 1 = \sin^2 x \Rightarrow 1 - \varphi \sin^2 x = \sin^2(-x) \Rightarrow \cos^2 x = \cos^2\left(\frac{\pi}{\varphi} + x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi x = \varphi k\pi + \frac{\pi}{\varphi} + x \\ \varphi x = \varphi k\pi - \frac{\pi}{\varphi} - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\varphi x = \varphi k\pi + \frac{\pi}{\varphi} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{\varphi} \\ \varphi x = \varphi k\pi - \frac{\pi}{\varphi} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\varphi} - \frac{\pi}{\varphi} \end{cases}$$