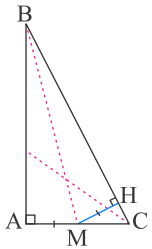


گزینه ۲

۱

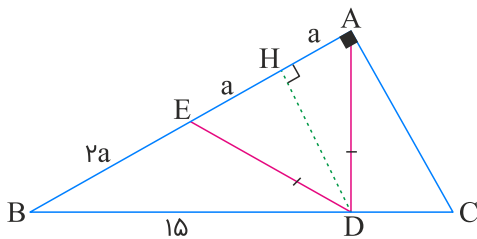
فرض کنیم نقطه M روی AC قرار دارد، پس فاصله آن از وتر و رأس قائمه، طول پاره‌های MH و MA است. پاره‌های MH و MA بر ضلع‌های زاویه B عمود است، بنابراین نقطه M روی نیمساز زاویه B قرار دارد در نتیجه نقطه M از دو ضلع زاویه B به یک فاصله است، پس از وتر و رأس قائمه به یک فاصله است. محل برخورد نیمساز زاویه B و ضلع AC یک جواب مسئله است. به همین ترتیب محل برخورد نیمساز زاویه C و ضلع AB ، جواب دیگر این مسئله است.



گزینه ۳

۲

مثلث ADE متساوی‌الساقین است، پس میانه وارد بر قاعده AE در آن ارتفاع نیز است. فرض می‌کنیم $AH = a$ ، آنگاه $EH = a$ ، پس طبق فرض خواهیم داشت $BE = EA = 2a$. همچنین $HD \parallel AC$ ، پس بنا بر قضیه تالس داریم:



$$\frac{BH}{HA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{3a}{a} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 5$$

گزینه ۱

۳

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC}$$

$$\xrightarrow{BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5} AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$S_{AHEF} = AH^2 = (2.4)^2 = 5.76$$

گزینه ۳

۴

$$\begin{aligned} \frac{3a-b}{a+b} &= \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت درمخرج}} \frac{3a-b}{a+b+3a-b} = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow \frac{3a-b}{4a} &= \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow \frac{-b}{4a} &= \frac{-5}{12} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

طول اضلاع باید مثبت باشند و همچنین در نامساوی مثلثی صدق کنند.

$$\begin{cases} 11 - x > 0 \Rightarrow x < 11 \\ x - 7 > 0 \Rightarrow x > 7 \\ 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 7 < x < 11 \quad (1)$$

$$\begin{cases} 11 - x + x - 7 > 2x \Rightarrow x < 2 \\ 11 - x + 2x > x - 7 \Rightarrow 11 > -7 \\ x - 7 + 2x > 11 - x \Rightarrow x > \frac{9}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

$BAD \parallel BM \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle BEM$
 $\Rightarrow \frac{AE}{EM} = \frac{AD}{BM} \quad (*)$

$BM \parallel AC : FC \parallel AB \xrightarrow[\text{جز به کل}]{\text{تالس}} \frac{AF}{AM} = \frac{BC}{BM}$
 $\xrightarrow{AD=BC, (*)} \frac{AE}{EM} = \frac{AF}{\underbrace{AM}_{AE+EM}}$
 $AE^2 + AE \cdot EM = AF \cdot EM$
 $AE^2 = AF \cdot EM - AE \cdot EM = (AF - AE) \cdot EM$

$$AE^2 = EF \cdot EM$$

$$\begin{cases} \frac{EF}{AE} = \frac{DB}{AB} = \frac{AB - AD}{AB} \\ \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب دو تساوی}} \frac{EF}{AC} = \frac{(AB - AD)AD}{AB^2} = \frac{\epsilon}{49} \Rightarrow \epsilon AB^2 = 49 AB \cdot AD - 49 AD^2$$

$$\xrightarrow{\div AB^2} 49 \left(\frac{AD}{AB} \right)^2 - 49 \left(\frac{AD}{AB} \right) + \epsilon = 0 \Rightarrow \left(49 \left(\frac{AD}{AB} \right) - \epsilon \right) \left(49 \left(\frac{AD}{AB} \right) - 1 \right) = 0$$

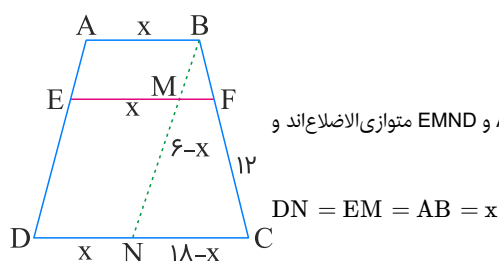
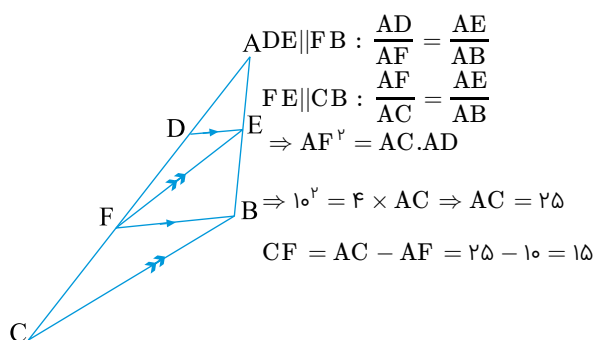
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{49} \text{ یا } \frac{\epsilon}{49}$$

$$\begin{cases} \frac{AB}{BC} = \frac{f}{\frac{3}{2} + 1/\lambda} = \frac{f}{\delta} \\ \frac{BD}{AB} = \frac{3/2}{f} = \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{\delta} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\begin{cases} \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{حالت دوم تشابه}} \triangle ABD \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{f}{\delta}$$

با تفصیل در صورت و ترکیب در مخرج داریم:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{f}{\delta} \Rightarrow \frac{AC - AD}{AC + AD} = \frac{\delta - f}{\delta + f} = \frac{1}{9}$$



از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم پاره‌خط‌های EF و CD را در M و N قطع کند. در این صورت ABME و EMND متوازی‌الاضلاع‌اند و چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس:

در نتیجه:

باتوجه به تعمیم قضیه تالس در مثلث BNC داریم:

$$\frac{MF}{NC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{6-x}{18-x} = \frac{BF}{BC} = \frac{3}{10} = \frac{1}{\delta}$$

$$\Rightarrow 30 - 5x = 18 - x \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

چون $DE \parallel BC$ است، طبق قضیه تالس داریم:

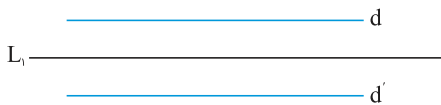
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{2}{3x+5} \Rightarrow 3x+5 = 2x+10 \Rightarrow x=5$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{11} = \frac{y-1}{y+3} \Rightarrow y+3 = 11y-11$$

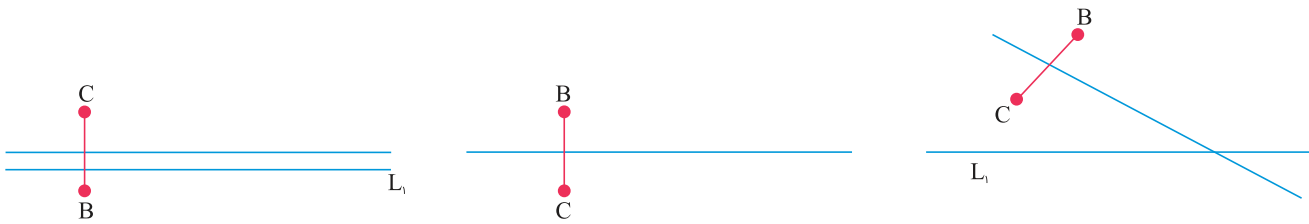
$$\Rightarrow 14 = 10y \Rightarrow y = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$2x+5y = 2 \times 5 + 5 \times \frac{7}{5} = 10+7=17$$

L_1 خطی موازی دو خط و وسط آنها است:



مجموعه نقاطی از صفحه که از دو نقطه B و C به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف BC است. تقاطع عمودمنصف BC با خط L_1 جواب موردنظر است که ۳ حالت دارد:



عمودمنصف BC و خط L_1 موازی: جواب ندارد
عمودمنصف BC بر خط L_1 منطبق: بی‌شمار جواب
عمودمنصف BC و خط L_1 متقاطع: یک جواب

نسبت اضلاع به صورت $5k, 7k, 9k$ و $11k$ است. همواره داریم:

$$5k + 7k + 9k + 11k = 160 \Rightarrow 32k = 160 \Rightarrow k = 5$$

پس طول کوچک‌ترین ضلع:

$$5k = 5(5) = 25$$

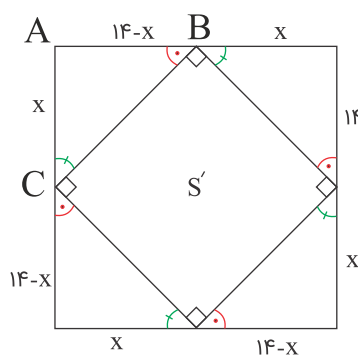
می‌دانیم دو مربع (۴ ضلعی منظم) همواره متشابه‌اند. در این صورت اگر نسبت تشابه را k بگیریم، نسبت مساحت‌ها k^2 است. پس $k^2 = \frac{49}{25}$ ، یعنی $k = \frac{7}{5}$. بنابراین داریم:

$$\frac{\text{ضلع مربع بزرگ‌تر}}{\text{ضلع مربع کوچک‌تر}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{14}{x} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = 10$$

چهار مثلث گوشه (که یکی از آنها هاشورزده است) با یکدیگر همنهشت و در نتیجه هم‌مساحت‌اند و مساحت قسمت هاشورزده $\frac{1}{4}$ تفاوت مساحت دو مربع است:

$$\text{مساحت هاشورزده} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}(S_{\text{مربع بزرگ}} - S_{\text{مربع کوچک}})$$

$$= \frac{1}{4}(14^2 - 10^2) = 24$$



$$14-x \frac{S}{S'} = \frac{49}{25} \Rightarrow \frac{14^2}{BC^2} = \frac{49}{25} \Rightarrow \frac{14}{BC} = \frac{7}{5} \Rightarrow BC = 10$$

$$\Rightarrow BC^2 = 100 \Rightarrow x^2 + (14-x)^2 = 10^2$$

لزومی به حل معادله نیست. باتوجه به اعداد فیثاغورسی (۶-۸-۱۰)، نتیجه می‌گیریم که $x = 6$ یا $x = 8$ است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

چهار مثلث قائم‌الزاویه کناری همنهشت هستند.

مساحت مربع بزرگ و کوچک را به ترتیب S و S' می‌نامیم و داریم:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{حالت سوم تشابه}} \triangle ADE \sim \triangle CBA \Rightarrow \hat{DAE} = \hat{C}$$

پس $\hat{C} = 56^\circ$ و در مثلث ABC داریم:

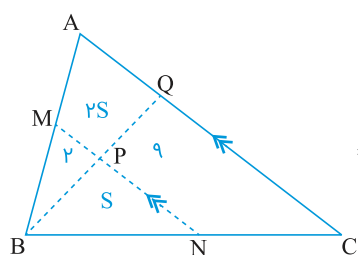
$$\hat{B} + 12^\circ + 56^\circ + 56^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 112^\circ - 12^\circ = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$$

$$\frac{y}{3x+5} = \frac{2}{2x-2} \Rightarrow 14x-14 = 6x+10 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{2}{2(3)-2} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow 8 = 4y-4 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3$$

$$x+y=6$$

با استفاده از قضیه تالس داریم:



$$\frac{MP}{AQ} = \frac{BP}{BQ}, \quad \frac{NP}{CQ} = \frac{BP}{BQ}$$

$$\Rightarrow \frac{MP}{AQ} = \frac{NP}{CQ} \Rightarrow \frac{MP}{NP} = \frac{AQ}{CQ}$$

$$\frac{S_{BMP}}{S_{BPN}} = \left(\frac{MP}{NP}\right)^2, \quad \frac{S_{ABQ}}{S_{BCQ}} = \left(\frac{AQ}{CQ}\right)^2$$

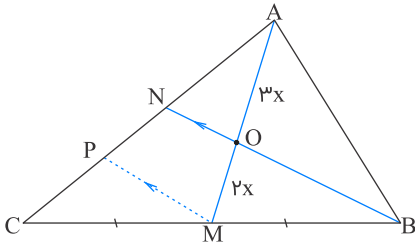
$$\Rightarrow \frac{2}{S} = \frac{2S+2}{S+9} \Rightarrow 2S^2 + 2S = 2S + 18 \Rightarrow S = 3$$

همچنین:

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

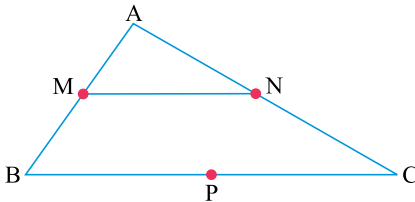
$$S_{ABC} = 3 + 9 + 6 + 2 = 20$$

باتوجه به فرض، $\frac{OA}{OM} = \frac{3}{2}$. حال خطی از M به موازات BN رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند، بنابراین:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle APM : ON \parallel MP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ON}{MP} = \frac{AO}{AM} = \frac{3}{5} \Rightarrow ON = \frac{3}{5}MP \\ \triangle CBN : MP \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MP}{BN} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow BN = 2MP \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ON}{BN} = \frac{\frac{3}{5}MP}{2MP} = \frac{3}{10}$$

چون نقاط داده شده، وسط اضلاع مثلث هستند، پس طبق عکس تالس می‌توان گفت MN موازی BC است، پس شیب یکسان دارند: (شکل حدودی رسم شده است)



$$m_{BC} = m_{MN} = \frac{1 - 1}{2 - (-1)} = 0$$

معادله خط با شیب صفر و گذرنده از نقطه $P(1, 0)$ را می‌نویسیم:

$$y - 0 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 0$$

چون $AD \parallel BF$ ، بنابراین دو مثلث EBF و EDA متشابه‌اند. می‌توان نوشت:

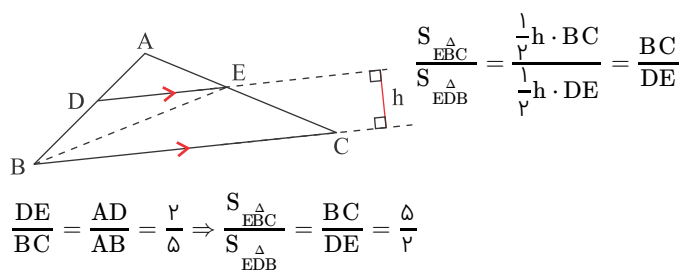
$$\frac{EF}{EA} = \frac{BE}{DE} \quad (1)$$

همچنین از موازی بودن AB و DG نتیجه می‌گیریم دو مثلث EAB و EGD متشابه‌اند و به دست می‌آید:

$$\frac{EG}{AE} = \frac{ED}{EB} \quad (2)$$

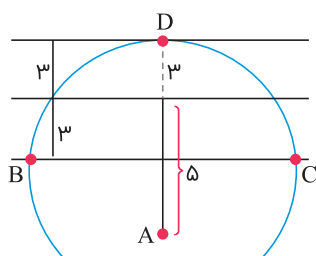
از ضرب دو برابری (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\frac{EF \times EG}{AE^2} = 1 \Rightarrow EF \times EG = AE^2 \Rightarrow 4 \times 9 = AE^2 = 36 \Rightarrow AE = 6$$

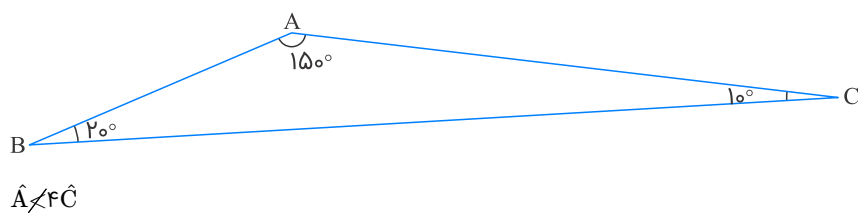


طبق تالس در مثلث ABC داریم:

همهٔ نقاطی که از A به فاصلهٔ ۸ باشند روی دایره‌ای به مرکز A قرار دارند. همهٔ نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ باشند، روی دو خط موازی با خط d باشد در دو طرف خط طبق شکل تعداد نقاط برخورد ۳ نقطه می‌باشد؛ B، C و D نقاط برخورد هستند.



گزینهٔ "۲": در مثلث شکل زیر، بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر نیست:



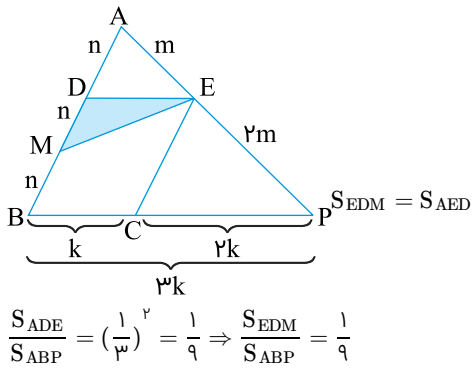
$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}_2, \hat{D}_1 \text{ مکمل اند} \\ \hat{E}, \hat{D}_1 \text{ مکمل اند} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{E} = \hat{D}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{D}_2 \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{AE}{DC} = \frac{BE}{BD} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{1/5} = \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{x} \Rightarrow \begin{cases} 1/5x + 2 = 5 \Rightarrow x = \frac{2}{1/5} = \frac{10}{1} \\ y+1 = x(x+2) \Rightarrow y = \frac{10}{1} \times \frac{10}{1} - 1 \Rightarrow y = \frac{99}{1} \end{cases}$$

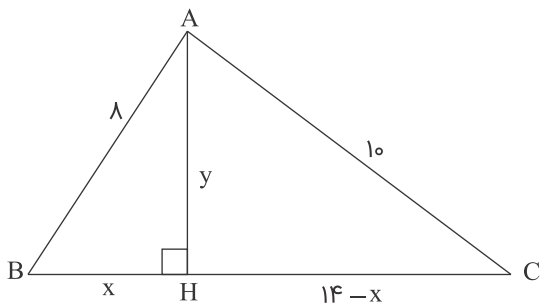
$$\Rightarrow y - x = \frac{99}{1} - \frac{10}{1} = \frac{89}{1}$$

از تناسب $\frac{PC}{PB} = \frac{2}{3}$ و موازی بودن ضلع‌های متوازی الاضلاع و باتوجه به قضیه تالس نسبت‌های مشخص شده روی شکل به دست می‌آید.



در مثلث ED, EAM میانه است، پس:

از طرف دیگر $\triangle ADE \sim \triangle ABP$ و نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ است، پس:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 14^2 \\ (14-x)^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (14-x)^2 - x^2 = 10^2 - 14^2$$

$$\Rightarrow 196 - 28x + x^2 - x^2 = 100 - 196 = -96$$

$$\Rightarrow 196 - 28x = -96 \Rightarrow 28x = 292 \Rightarrow x = \frac{292}{28} = \frac{73}{7}$$

$$y^2 = 14^2 - x^2 = 14^2 - \left(\frac{73}{7}\right)^2 = \frac{56^2 - 73^2}{49}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} y^2 = \frac{(56-73)(56+73)}{49} = \frac{16 \times 129}{49} \Rightarrow y = \frac{16\sqrt{6}}{7}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{16\sqrt{6}}{7} \times 14 = 16\sqrt{6}$$

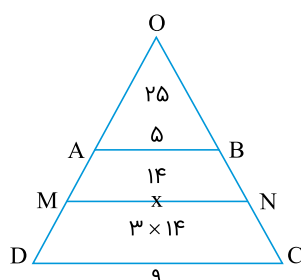
دو ساق را امتداد می‌دهیم تا در نقطه O یکدیگر را قطع کنند. چون دو مثلث OAB و ODC متشابه هستند، پس:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \frac{۲۵}{۸۱}$$

فرض می‌کنیم $S_{OAB} = ۲۵$ و $S_{OCD} = ۸۱$ (توجه کنید که این فرض کلیت مسئله را دچار مشکل نمی‌کند).

چون $S_{ABNM} = \frac{1}{3} S_{MNC D}$ ، پس:

$$S_{ABNM} = ۱۴, S_{MNC D} = ۴۲$$



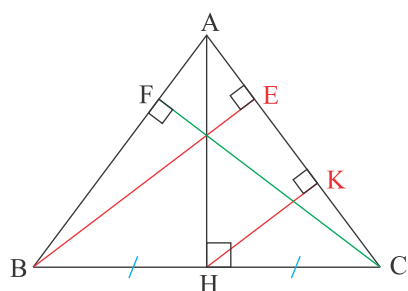
$$\frac{AB}{MN} = \sqrt{\frac{S_{OAB}}{S_{OMN}}} \Rightarrow \frac{5}{x} = \sqrt{\frac{۲۵}{۳۹}} \Rightarrow x = \sqrt{۳۹}$$

اکنون از تشابه دو مثلث OAB و OMN به دست می‌آید:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۱۲^۲ = AC^۲ + ۴^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۱۲۸ \Rightarrow AC = ۸\sqrt{۲}$$

$$CD = AC - AD = ۸\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{BC \cdot CD}{۲} = \frac{۴ \times ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۴\sqrt{۲}$$



چون $h_b = h_c = ۱۲$ ، پس مثلث ABC متساوی الساقین است، از H بر AC عمود می‌کنیم. چون H وسط BC است، پس:

$$HK = \frac{BE}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

از طرفی بنا به فرض، $AH = h_a = ۱۰$ ، پس در مثلث قائم‌الزاویه AHK، باتوجه به $HK = ۶$ ، نتیجه می‌شود $AK = ۸$ و داریم:

$$HK^۲ = AK \cdot KC \Rightarrow ۳۶ = ۸ \times KC \Rightarrow KC = \frac{۹}{۲}$$

$$S_{\triangle ABC} = ۲S_{\triangle AHC} \Rightarrow ۲ \times \frac{1}{۲} \cdot HK \cdot AC = ۶ \left(۸ + \frac{۹}{۲} \right) \Rightarrow S_{\triangle ABC} = ۴۸ + ۲۷ = ۷۵$$