



گزینه ۴

۱

سه حالت وجود دارد:

$$a < f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^f - bx^a + \text{و} - b}{x^a - \text{و} x + \text{و} - b} = -\text{و} \xrightarrow{a < f} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^f}{(x^a) \text{ یا } (-\text{و} x)} = \infty$$

بنابراین در این حالت حاصل حد کسر برابر ∞ شده و غیرقابل قبول است.

$$a = f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{fx^f - bx^f + \text{و} - b}{x^f - \text{و} x + \text{و} - b} = -\text{و} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f - b)x^f}{x^f} = -\text{و} \Rightarrow f - b = -\text{و} \Rightarrow b = \text{و}$$

$$a > f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^f - bx^a + \text{و} - b}{x^a - \text{و} x + \text{و} - b} = -\text{و} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx^a}{x^a} = -\text{و} \Rightarrow -b = -\text{و} \Rightarrow b = \text{و}$$

گزینه ۳

۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a^{\text{و}} - \text{و} a}{1 - x} = +\infty \Rightarrow \frac{a^{\text{و}} - \text{و} a}{0^-} = +\infty \Rightarrow a^{\text{و}} - \text{و} a < 0$$

$$\Rightarrow 0 < a < \text{و} \xrightarrow{+1} 1 < a + 1 < \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + 1}{x} = \frac{a + 1}{0^+} = +\infty \quad (1 < a + 1 < \text{و})$$

گزینه ۳

۳

می‌دانیم تابع $y = \log_a x$ به ازای $a > 1$ ، تابعی صعودی است و چون $\sqrt{\text{و}} > 1$ ، داریم:

$$\log_{\sqrt{\text{و}}}(\sqrt{x+1}) < \log_{\sqrt{\text{و}}}(x+\text{و})$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} < x+\text{و} \Rightarrow x+1 < x^{\text{و}} + \text{و}x + \text{و}$$

$$\Rightarrow x^{\text{و}} + \text{و}x + \text{و} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

از طرف دیگر دامنه نامعادله برابر است با: (۲) $x \in (-1, +\infty)$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} x \in (-1, +\infty)$$

گزینه ۱

۴

توجه کنید که عبارت $1 + \cos \alpha$ همواره نامنفی است و همچنین $\sin f$ عددی منفی است.

$$\lim_{x \rightarrow f^+} \frac{\sin x}{1 + \cos \frac{f\pi}{x}} = \frac{\sin f}{0^+} = -\infty$$

$$\cos kx = \cos yx \Rightarrow \begin{cases} kx = yk\pi + yx \\ kx = yk\pi - yx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = yk\pi \\ yx = yk\pi \Rightarrow x = \frac{yk\pi}{y} \end{cases}$$

$$a < 0, f(x) \geq 0, f(a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

اگر $I = (a - 1, 2b)$ همسایگی راست $x = -1$ باشد، آنگاه:

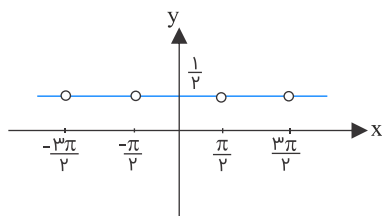
$$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$$

اگر $I = \{a + b\}$ همسایگی محذوف $x = 3$ باشد، داریم:

$$a + b = 3 \Rightarrow b = 3$$

پس $I = (-1, 6)$ یک همسایگی چپ $x = 6$ است.

$$f(x) = \frac{\cos x}{y \cos x} = \begin{cases} \frac{1}{y} & ; x \neq \frac{(2k+1)\pi}{y} \\ \text{تعریف نشده} & ; x = \frac{(2k+1)\pi}{y} \end{cases}$$



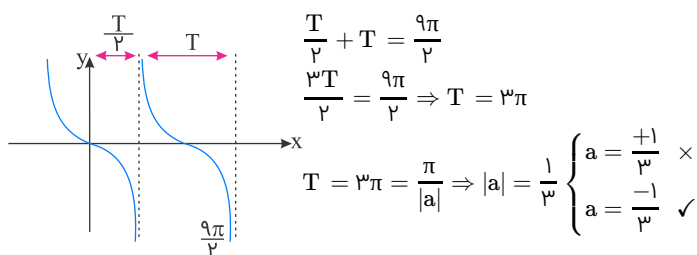
پس دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos x}{y \cos x}$ ، π است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sin^{\frac{1}{y}} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin^{\frac{1}{y}} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{\cos x \sin^{\frac{1}{y}} x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (-\frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2})}{\cos x \sin^{\frac{1}{y}} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \sin^{\frac{1}{y}} x \cos^{\frac{1}{y}} x}{\cos x \sin^{\frac{1}{y}} x} = -\frac{1}{2}$$

دوره تناوب $y = \tan(ax)$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

مطابق شکل داریم:



باتوجه به شکل متوجه می‌شویم تابع $y = \tan x$ نسبت به محور y قرینه شده، پس $a = \frac{1}{3}$ قابل قبول نیست.

ابتدا از روی نمودار تابع f ، ضابطه آن را می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x < 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \\ x-1 & , 0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

حال ابتدا ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم. یادمان باشد دامنه تابع وارون در هرکدام از ضابطه‌ها، همان بُرد تکتک آن‌ها خواهد بود. داریم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & , 0 \leq x < 1 \\ x+1 & , -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2x) = \begin{cases} 2x-1 & , 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x+1 & , -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(2x) + 3 = \begin{cases} 2x+2 & , 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x+4 & , -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

حال برای تعیین نقاط برخورد تابع $y = f^{-1}(2x) + 3$ و وارونش، کافی است به این نکته توجه کنیم که تکتک ضابطه‌های این تابع اکیداً صعودی است. پس نقطه برخورد نمودار این تابع با وارونش، قطعاً روی نیمساز ناحیه اول و سوم بوده و می‌توانیم تکتک ضابطه‌ها را با $y = x$ قطع دهیم. داریم:

$$f^{-1}(2x) + 3 = x \Rightarrow \begin{cases} 2x+2 = x \Rightarrow x = -2 \notin [0, \frac{1}{2}) & \text{غ ق ق} \\ 2x+4 = x \Rightarrow x = -4 \notin [-\frac{1}{2}, 0) & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس این تابع، وارونش را قطع نمی‌کند.

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} (y - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

دلیل اینکه چرا جلوی گزینه‌ها $x > 0$ نوشته این است که برد تابع f برابر $[0, +\infty)$ می‌باشد که همان دامنه f^{-1} می‌شود (بجز در نقطه صفر که مخرج برابر صفر می‌شود).

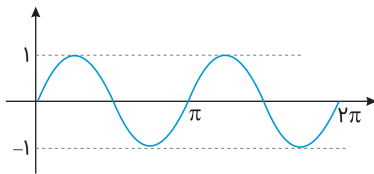
نکته: $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$
اثبات:

$$\begin{aligned}\tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}\end{aligned}$$

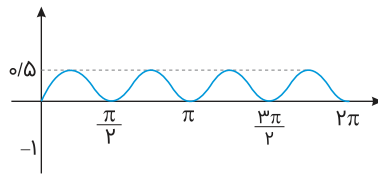
حال داریم:

$$y = \frac{\sin 2x}{\tan x + \cot x} = \frac{\sin 2x}{\frac{2}{\sin 2x}} = \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

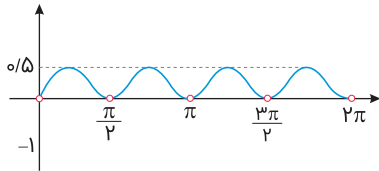
همان‌طور که در شکل می‌بینیم، دوره تناوب تابع $\frac{\pi}{2}$ است.



$$y = \sin 2x$$

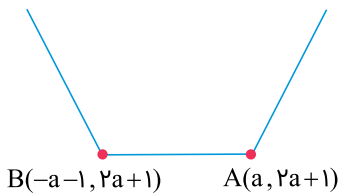


$$y = \frac{1}{2} \sin^2 2x$$



$$y = \frac{\sin 2x}{\tan x + \cot x}$$

تابع موردنظر گلدانی شکل است. چون $a > 0$ است، پس نمودار تقریبی به‌صورت زیر است:



باتوجه به اطلاعات سؤال تابع در فاصله $[-a-1, a]$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) است.

$$-a-1 = -6 \Rightarrow a = 5$$

$$b = a = 5$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-f[x] - a^x}{-(2x^2 - x - 3)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-f[x] - a^x}{-(x+1)(2x-3)} = -\infty \Rightarrow \frac{-f(-2) - a^2}{-(0^-)(-5)} = -\infty \\ &\Rightarrow \frac{\lambda - a^2}{0^-} = -\infty \Rightarrow \lambda - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < \lambda \Rightarrow -\sqrt{\lambda} < a < \sqrt{\lambda} \\ &\xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\end{aligned}$$

پس به‌ازای پنج مقدار صحیح، حاصل حد، $-\infty$ می‌شود.

عبارت $\sin x - [\sin x]$ به صورت زیر است:

$$-1 < [\sin x] - \sin x \leq 0 \Rightarrow R_g = (-1, 0]$$

تابع $f(x)$ در $(-1, 0)$ اکیداً یکنواست، پس با قراردادی ابتدا و انتهای دامنه آن (که برد g است) در تابع f ، می‌توانیم برد f را بیابیم:

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(0) = \frac{1}{3}$$

در نتیجه:

$$R_{fog} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\underbrace{-2 \cos 70^\circ}_{\sin 20^\circ} \underbrace{\cos 110^\circ}_{-\sin 20^\circ} - 1 = 2 \sin^2 20^\circ - 1 = -\cos 2(20^\circ) = -\cos 40^\circ$$

$$= -\sin 50^\circ = \sin(-50^\circ) = \sin(360^\circ - 50^\circ) = \sin(310^\circ)$$

می‌دانیم تابع $y = \log x$ اکیداً صعودی است. پس $[\log x]$ در $x = 1$ از راست پیوسته است. به‌علاوه اگر $1 \leq x \leq 2$ باشد چون $0 \leq \log x \leq \log 2$ است. در هیچ نقطه‌ای از این فاصله $[\log x]$ ناپیوسته نخواهد بود.

برای سایر گزینه‌ها مثال نقض می‌زنیم:

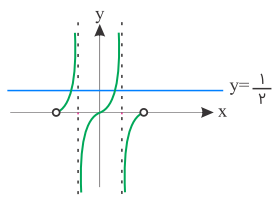
(۱) تابع در $x = 1$ باید از راست پیوسته باشد، اما مقدار $f(1)$ موجود نیست، پس تابع در بازه $[1, 2]$ ناپیوسته است.

$$2) \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} [x^2] = [2^+] = 2, \quad \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^-} [x^2] = [2^-] = 1$$

تابع حداقل در یک نقطه $x = \sqrt{2}$ ناپیوسته است.

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x}{2}\right] = [1^-] = 0, \quad f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$$

تابع در $x = 2$ از چپ پیوسته نیست، پس تابع در بازه $[1, 2]$ ناپیوسته است.

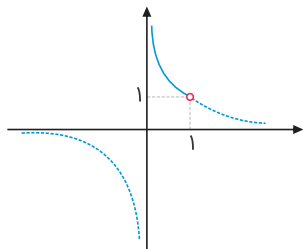


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+3} + 3^{2x-1}}{3^{2x+1} + 2^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x-1}}{3^{2x+1}} = \frac{1}{9}$$

$$f(x) = x - [x] \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

اگر ورودی تابع $\frac{1}{x}$ در فاصله $(0, 1)$ باشد مطابق شکل خود تابع در فاصله $(1, +\infty)$ تغییر می‌کند. پس برد تابع $g \circ f$ برابر $(1, +\infty)$ است.



$$x = 0 \Rightarrow f^v(0)f(g(0)) = 1 \Rightarrow f^v(0)f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{f^v(0)}$$

$$x = 1 \Rightarrow f^v(1)f(g(1)) = v \Rightarrow f^v(1)f(0) = v$$

$$\left(\frac{1}{f^v(0)}\right)^v f(0) = v \Rightarrow \frac{1}{f^v(0)} = v \Rightarrow f(0) = \frac{1}{\sqrt[v]{v}}$$

باتوجه به ضریب ۳ پشت تابع f برد تابع سه برابر می‌شود.

$$R_f = [0, 1] \Rightarrow R_{f^3} = [0, 3] \quad (\text{I})$$

$$D_f = [-1, v] \Rightarrow D_{f^3(1-\frac{3}{v})} : -1 \leq 1 - \frac{x}{v} \leq v$$

$$\Rightarrow -v \leq -\frac{x}{v} \leq 1 \xrightarrow{\times -v} -v \leq -x \leq v$$

$$\Rightarrow D_{f^3(1-\frac{3}{v})} = [-v, v] \quad (\text{II}) \Rightarrow (\text{I}) \cap (\text{II}) = [0, 3]$$

$$D_g : (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

x	-1	0	1
x	-	-	+
(x-1)	-	-	+
f(x)	+	-	-
h(x)=x(x-1)f(x)	+	-	-

اگر $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} vx = vk\pi + \frac{\pi}{6} \\ vx = vk\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = vk\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6v} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{6v} \end{cases}$$

$$-\cos \varphi x + \varphi \sin x + \varphi = 0 \Rightarrow \varphi \sin^{\varphi} x + \varphi \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{\varphi} \\ \sin x = -\frac{1}{\varphi} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{\varphi}, -\frac{5\pi}{\varphi} \end{cases}$$

فرض می‌کنیم دوره تناوب تابع $y = f(x)$ ، T باشد، در این صورت دوره تناوب تابع $y = f(\pi x + \varphi)$ برابر است با $\frac{T}{\pi}$.
از طرف دیگر طبق نمودار داده شده، دوره تناوب تابع $y = f(\pi x + \varphi)$ $\frac{\varphi}{\pi}$ است. بنابراین:

$$\frac{T}{\pi} = \frac{\varphi}{\pi} \Rightarrow T = \frac{\varphi \pi}{\pi}$$

حال دوره تناوب تابع $y = f\left(\frac{x}{\varphi} + \frac{\pi}{\varphi}\right)$ برابر می‌شود با:

$$\varphi T = \frac{\varphi \pi}{\pi}$$

توجه کنید می‌توان نمودار $y = f\left(\frac{x}{\varphi} + \frac{\pi}{\varphi}\right)$ را با کمک قوانین انتقال از روی نمودار $y = f(\pi x + \varphi)$ رسم کرد و از این طریق دوره تناوب تابع را به دست آورد.

توجه کنید که در محاسبه حد، اگر داخل براکت عدد صحیح شود باید آن عدد صحیح را به‌طور دقیق (φ^+ یا φ^-) تعیین کرد؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\varphi x + 1}{\varphi x + 1} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\varphi x + \varphi - 1}{\varphi x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\varphi(\varphi x + 1)}{\varphi x + 1} - \frac{1}{\varphi x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\varphi - \frac{1}{\varphi x + 1} \right] = [\varphi - 0^+] = [\varphi^-] = 1 \end{aligned}$$

نکته: برخی از دانش‌آموزان عزیز راه حل نادرست زیر را انجام می‌دهند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\varphi x + 1}{\varphi x + 1} \right] = \left[\frac{\varphi}{\varphi} \right] = [\varphi] = \varphi$$

اول:

$$1 + \tan^{\varphi} x = \frac{1}{\cos^{\varphi} x}$$

$$\cos^{\varphi} x - \sin^{\varphi} x = \cos^{\varphi} x - \sin^{\varphi} x = \cos^{\varphi} x$$

دوم:

$$\begin{aligned} &(\cos^{\varphi} x - \sin^{\varphi} x)(1 + \tan^{\varphi} x) + \frac{1}{\cos^{\varphi} x} \\ &= \frac{\cos^{\varphi} x}{\cos^{\varphi} x} + \frac{1}{\cos^{\varphi} x} = \frac{\cos^{\varphi} x + 1}{\cos^{\varphi} x} \\ &\xrightarrow{\cos^{\varphi} x = \varphi \cos^{\varphi} x - 1} \frac{\cos^{\varphi} x + 1}{\cos^{\varphi} x} = \frac{\varphi \cos^{\varphi} x - 1 + 1}{\cos^{\varphi} x} = \frac{\varphi \cos^{\varphi} x}{\cos^{\varphi} x} = \varphi \end{aligned}$$

$$\left\lceil \frac{\vartheta \pi}{\mathfrak{a} + \mathfrak{l}} \right\rceil = \lambda \xrightarrow{\mathfrak{a} > \circ} \vartheta (\mathfrak{a} + \mathfrak{l}) = \lambda \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{w} \Rightarrow f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{w} + \vartheta \sin(\frac{\pi}{\mathfrak{f}} \mathfrak{x})$$

$$\text{Max} f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{w} + |\vartheta| = \mathfrak{d} \quad , \quad \text{min} f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{w} - |\vartheta| = \mathfrak{l}$$

$$\text{Max} f(\mathfrak{x}) + \text{min} f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{d} + \mathfrak{l} = \mathfrak{e}$$