



گزینه ۲

۱

$$\sqrt{\frac{x^y y^y}{z^y}} = \frac{\sqrt{x^y} \times \sqrt{y^y}}{\sqrt{z^y}} = \frac{|x||y^y|}{|z|} = \frac{|x|y^y}{|z|} \xrightarrow{\frac{|x|}{|z|} = \left|\frac{x}{z}\right|} \left|\frac{x}{z}\right| y^y$$

حال برای برقراری تساوی $\left|\frac{x}{z}\right| y^y = \frac{-xy^y}{z}$ برقرار باشد، باید $\left|\frac{x}{z}\right| = \frac{-x}{z}$ شود؛ به عبارت دیگر باید $\frac{x}{z} < 0$ باشد یعنی هم‌علامت نباشند، لذا $xz < 0$ خواهد بود.

گزینه ۴

۲

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ \Rightarrow A^2 &= \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ \Rightarrow A^2 &= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4 - 3} = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6} \\ AB &= \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^3} \times \sqrt{6} = \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6 \end{aligned}$$

گزینه ۴

۳

جمله اول دسته اول برابر 1^2 ، جمله اول دسته دوم برابر 2^2 ، ... و جمله اول دسته n ام برابر با n^2 است، پس دسته دهم به صورت زیر است:

$$\{10^2, 101, \dots, 11^2 - 1\} = \{100, 101, \dots, 120\}$$

واسطه حسابی بین جملات اول و آخر این دسته برابر است با:

$$\frac{100 + 120}{2} = 110$$

گزینه ۴

۴

با استفاده از اتحاد $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ داریم:

$$\frac{k-1}{k-2} = \frac{1}{2k-7} \Rightarrow \frac{k-1}{k-2} = \frac{2k-6}{2k-7} \Rightarrow 2k^2 - 9k + 7 = 2k^2 - 10k + 12 \Rightarrow k = 5$$

با جایگذاری $k = 5$ ، مقدار $\cot x$ را حساب می‌کنیم:

$$\cot x = \frac{2k-7}{2k-6} = \frac{2(5)-7}{2(5)-6} = \frac{3}{4}$$

حال مقدار $\sin x$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\sin^2 x} \\ \Rightarrow \sin^2 x &= \frac{16}{25} \Rightarrow |\sin x| = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

از یک اتحاد مثلثاتی مهم استفاده می‌کنیم.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{16} + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{31}{16} \Rightarrow |\sin \alpha - \cos \alpha| = \frac{\sqrt{31}}{4}$$

اثبات نکته: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$$

$$= \underbrace{(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2}_1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \underbrace{(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2}_1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 1 = 2$$

$$\sqrt{\Delta}(\sin x + \cos x) = \sqrt{\Lambda}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \Delta(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = \Lambda \Rightarrow \Delta(1 + 2 \sin x \cos x) = \Lambda$$

$$\Rightarrow \Delta + 2\Delta \sin x \cos x = \Lambda \Rightarrow 2\Delta \sin x \cos x = \Lambda - \Delta \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{\Lambda - \Delta}{2\Delta}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\Delta}{\Lambda} = \frac{\Delta + 1}{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \Lambda \\ \tan x = \frac{1}{\Lambda} \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{fab^a} \times \frac{a^b b^a}{a^{-b}} \times \left(\frac{1}{fa}\right)^b = \frac{1}{fab^a} \times a^b b^a \times \frac{1}{\Lambda a^b} = \frac{1}{\Lambda^2 b}$$

مجموعه مطرح شده در الف، متناهی است. درواقع:

$$A = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{p}{q}, \dots, \frac{\Lambda}{q}, \frac{1}{\Lambda}, \frac{p}{\Lambda}, \dots, \frac{p}{\Lambda}, \dots, \frac{1}{p} \right\}$$

پس A متناهی است.

مجموعه B نامتناهی است. زیرا همه اعداد به فرم $\frac{x}{x+q}, \dots, \frac{x}{x+p}, \frac{x}{x+1}$ که $x \in \mathbb{N}$ است را شامل می‌شود.

مجموعه C نیز نامتناهی است. درواقع:

$$\begin{cases} px \in M \\ qx \notin M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < px < 1 \\ qx \notin (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{p} \\ x \notin (0, \frac{1}{q}) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{q} \leq x < \frac{1}{p}$$

که یک مجموعه نامتناهی است.

ابتدا دقت کنید که:

$$B = \{x \in A \mid \forall x \in A\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$C = \{\forall x \mid x \in A\} = \{2, 4, 6, 8, \dots, 10\}$$

بنابراین:

$$B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{\forall x \mid \exists x \in A, x \in A\}$$

$$A = \frac{2 - \sqrt{13}}{5} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A \cdot B = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = (1)^2 - 2\left(\frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$A^4 + B^4 = (A^2 + B^2)^2 - 2A^2B^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{49}{64} - \frac{1}{128} = \frac{98}{128} - \frac{1}{128} = \frac{97}{128}$$

جملات سوم (aq^2) ، چهارم (aq^3) و ششم (aq^5) دنباله هندسی a_n را سه جمله متوالی b_k ، b_{k+1} و b_{k+2} از دنباله حسابی b_n در نظر می‌گیریم. باتوجه به اینکه در هر سه جمله متوالی یک دنباله حسابی، مجموع جملات اول و سوم، دو برابر جمله دوم است، داریم:

$$b_k + b_{k+2} = 2b_{k+1} \Rightarrow aq^k + aq^5 = 2aq^3 \Rightarrow aq^k(1 + q^5) = 2aq^3 \Rightarrow 1 + q^5 = 2q^3 \Rightarrow 1 - q^5 = 2q^3 - 1 - q^5 \Rightarrow 1 - q = q(1 - q^4) = q(1 - q)(1 + q)$$

$$\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{q \neq 1} 1 = q(1 + q) \Rightarrow q^2 + q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

باتوجه به اینکه جملات دنباله هندسی موردنظر همگی مثبت هستند، می‌توان دریافت که مقدار قدر نسبت باید مثبت باشد. زیرا در دنباله‌های هندسی با قدر نسبت منفی علامت جملات به صورت یک‌درمیان مثبت و منفی خواهد بود. بنابراین فقط مقدار $q = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ قابل قبول است.

اگر طرفین رابطه داده شده را بر x^2 تقسیم کنیم:

$$x^2 + 1 = \frac{9}{x^2} \Rightarrow \frac{9}{x^2} - x^2 = 1 \Rightarrow \frac{11}{x^2} - 11 + x^2 = 1 \Rightarrow \frac{11}{x^2} + x^2 = 12 \Rightarrow \frac{11 + x^4}{x^2} = 12 \Rightarrow \frac{x^4}{11 + x^4} = \frac{1}{12}$$

A: اعضای المپیاد ریاضی: $|A| = ۱۸$

B: اعضای المپیاد شیمی: $|B| = ۱۶$

افرادی که در هیچ‌یک از المپیادها شرکت نکرده‌اند اعضای مجموعه $A' \cap B'$ هستند. لذا:

$$|A' \cap B'| = ۱۰ \Rightarrow |(A \cup B)'| = ۱۰ \Rightarrow |A \cup B| = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰$$

از طرفی $|A \cap B| = |۳۰ - ۱۶ - ۱۸| = ۴$ تعداد افرادی که در یک المپیاد شرکت کرده‌اند.

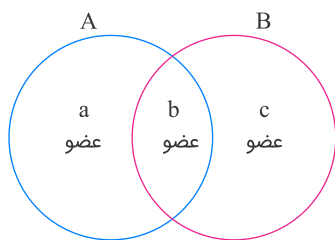
$$n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= ۱۸ - ۴ + ۱۶ - ۴ = ۲۶$$

توجه شود که دو مجموعه $A - B$ و $B - A$ مجزا هستند.

$$\sqrt[5]{\frac{۰/۰۰۷۲۹}{۱۰۰۰۰۰}} = \sqrt[5]{\frac{۷۲۹}{۱۰۰۰۰۰}} = \sqrt[5]{\frac{۳^۶}{۱۰^۵}} = \sqrt[5]{\frac{۳ \times ۳^۵}{۱۰^۵}} = \frac{۳}{۱۰} \sqrt[5]{۳} = ۰/۳a$$

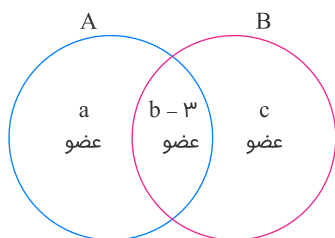
A و B را به صورت زیر در نظر می گیریم:



(I) : $a + b = ۳۰$ عضو است: A دارای

(II) : $b + c = ۱۸$ عضو است: B نیز دارای

اگر ۳ عضو از اشتراکشان برداریم، تعداد اعضای مجموعه ها به صورت زیر می شود:



در این حالت، اجتماع A و B، ۳۵ عضو دارد:

$$(III) : a + b - ۳ + c = ۳۵ \Rightarrow a + b + c = ۳۸$$

از رابطه (I) و (III) داریم:

$$\underbrace{a + b}_{۳۰} + c = ۳۸ \Rightarrow c = ۸$$

از رابطه (II) و (III) داریم:

$$a + \underbrace{b + c}_{۱۸} = ۳۸ \Rightarrow a = ۲۰$$

پس:

$$\begin{array}{c} a + b + c = ۳۸ \Rightarrow b = ۱۰ \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ ۲۰ \quad \quad ۸ \end{array}$$

در نتیجه $b - ۳$ برابر است با ۷.

جعبه ابزار: دنباله هندسی

$$a_2 + a_3 = \frac{1 - a_3}{2} \Rightarrow 2a_2 + 2a_3 = 1 - a_3 \quad (I)$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1 - a_4}{2} \Rightarrow 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 = 1 - a_4 \quad (II)$$

با تلفیق رابطه (I) و (II) داریم: $1 - a_3 + 3a_4 = 1$. پس:

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{3}$$

چون $a_3 = 3a_4$ ، پس در رابطه (I) داریم:

$$a_1 + q = \frac{4}{3} \text{ در نتیجه } a_1 = 1 \text{ پس } \frac{1}{q} = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ پس } a_3 = a_1 q^2 \text{ چون } a_3 = \frac{1}{q} \text{ در نتیجه } 6a_3 + 3a_3 = 1$$

چالش سؤال: جمع کردن دنباله هندسی بدون استفاده از فرمول

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2^{2n}}}{\sqrt[3]{2}}} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{\sqrt[3]{2^{2n}}}{\sqrt[3]{2}} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 15} \left(\frac{\sqrt[3]{2^{2n}}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{15} = \frac{(2^{\frac{2n}{3}})^{15}}{(2^{\frac{1}{3}})^{15}} = \frac{2^{10n}}{2^5} = 2^{10n-5}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{10n}}{(2^2)^5} = \frac{2^{10n}}{2^5} = 2^{10n-5} = 2^{15} \Rightarrow (2^2)^{15} = 2^{30} \Rightarrow 2 \cdot n - 5 = 30$$

$$\Rightarrow 2 \cdot n = 35 \Rightarrow n = 17.5$$

چون جمله اول صفر نیست، پس گزینه "۳" و "۴" حذف می شود. بین گزینه "۱" و "۲" جمله اول را به دست می آوریم. می بینیم که گزینه "۱" صحیح است.

$$n = 1 \quad 1^2 + 1 = 2$$

$$n = 2 \quad 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow a_n = n^2 + 1$$

$$n = 3 \quad 3^2 + 1 = 10$$

اگر تعداد دایره های آبی را با b_n و تعداد دایره های سفید را با a_n نمایش دهیم، داریم:

$$a_n: \quad 4, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \dots$$

$$0+4, \quad 1+4, \quad 4+4, \quad 9+4, \quad \dots$$

$$\Rightarrow a_n = (n-1)^2 + 4$$

$$b_n: \quad 0, \quad 4, \quad 8, \quad 12, \quad \dots$$

$$0 \times 4, \quad 1 \times 4, \quad 2 \times 4, \quad 3 \times 4, \quad \dots$$

$$\Rightarrow b_n = (n-1) \times 4$$

$$\frac{b_{10}}{a_{10}} = \frac{(10-1) \times 4}{(9)^2 + 4} = \frac{36}{85}$$

خط l با جهت مثبت محور x ها، زاویه 60° می‌سازد:

$$m_l = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

شیب خط l ، $\sqrt{3}$ و عرض از مبدأ آن -3 است. معادله آن به شکل زیر است:

$$y = \sqrt{3}x - 3$$

حال این خط را با خط $y = \sqrt{3}$ قطع می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{3}x - 3 \\ y = \sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{3}x - 3 = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}x = 3 + \sqrt{3} \\ \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{3}} + 1 = \sqrt{3} + 1$$

$$n(A) = 71 \text{ : ریاضی}$$

$$n(B) = 57 \text{ : شیمی}$$

$$n(A \cap B) = 32 \text{ : مشترک}$$

$$\begin{aligned} n(A - B) + n(B - A) &= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \\ &= 71 + 57 - 2 \times 32 = 64 \end{aligned}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه "۱":

$$x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow x \in [0, 1]$$

$$[0, 1] \cap \mathbb{N} = \{1\}$$

متناهی است.

گزینه "۳": مجموعه B سه‌عضوی و متناهی است. دقت کنید که در مجموعه B عضوی به صورت $\{2, 3, \dots\}$ وجود دارد که خودش مجموعه نامتناهی است، اما این مجموعه برای B فقط یک عضو محسوب می‌شود.

گزینه "۳":

$$C = \{\emptyset\}$$

مجموعه تک‌عضوی و متناهی است.

گزینه "۴": D مجموعه‌ای بی‌پایان از یک سلسله مجموعه اعداد طبیعی که هر مجموعه از مجموعه قبلی یک عضو بیشتر دارد. پس این مجموعه نامتناهی است.

از رابطه اول نتیجه می‌شود که $\tan \theta = \cos \alpha + 2$ است، همچنین $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ بنابراین $1 \leq \cos \alpha + 2 \leq 3$ می‌باشد، پس $\tan \theta > 0$ است. همچنین از رابطه دوم نتیجه می‌شود که:

$$(1 + a^2) \cos \theta = -a^2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{-a^2}{1 + a^2} < 0$$

پس θ در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد.

عبارت موردنظر را در $x - 1$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$A = \frac{(1-x)(1+x)(1+x^v)(1+x^f)}{1-x} = \frac{(1-x^v)(1+x^v)(1+x^f)}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x^f)(1+x^f)}{1-x} \Rightarrow A = \frac{1-x^f}{1-x}$$

افزایش ۲۵ درصدی قیمت یعنی هر سال $\frac{1}{f}$ به قیمت کالا اضافه می‌شود. مثلاً قیمت کالایی که در سال اول a باشد، در سال دوم $a + \frac{1}{f}a = \frac{f+1}{f}a$ است. می‌توان نتیجه گرفت که قیمت‌های هر ساله دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{f+1}{f}$ را تشکیل می‌دهند.

$$\frac{a_f}{a_1} = \frac{aq^f}{a} = q^f = \left(\frac{f+1}{f}\right)^f \simeq f/f \simeq f/f$$

راه حل اول:

$$x^v - \frac{\sin^v \alpha + \cos^v \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^v - \left(\frac{\sin^v \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\cos^v \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^v - (\tan \alpha + \cot \alpha) x + \tan \alpha \cot \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (x - \tan \alpha)(x - \cot \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \tan \alpha \\ x_v = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow x_1 x_v = 1$$

راه حل دوم:

$$x_1 x_v = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(A - B)' \cap (A \cup B) \cap B' = [(A \cap B')' \cap (A \cup B)] \cap B'$$

$$= \underbrace{(A' \cup B) \cap (A \cup B)}_{B \cup (A' \cap A)} \cap B' = B \cap B' = \emptyset$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\emptyset}$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_B$

متمم مجموعه $\emptyset$ ، U می‌باشد.