



گزینه ۳

۱

$$D_f : \left. \begin{array}{l} x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = (0, +\infty) - \{1\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_{\text{gof}} = \begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \in (0, +\infty) - \{1\} & \text{(I)} \\ f(x) \in D_g \Rightarrow \log_x(x+2) \in \mathbb{R} - \{2\} \end{cases}$$

$$\log_x(x+2) \neq 2 \Rightarrow x+2 \neq x^2$$

$$x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow D_{\text{gof}} = (0, +\infty) - \{1, 2\}$$

گزینه ۲

۲

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$D_f : x \geq 2, D_g : (2 \geq x) \cup (x \geq 3)$$

$$D_f \cap D_g : x \geq 3 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (x \geq 3) - \{2, 3\} = [3, \infty) - \{2, 3\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (3, \infty) \text{ یا } x > 3$$

گزینه ۴

۳

دامنه تابع $f(x)$ و $g(x)$ باید برابر باشد. مخرج $f(x)$ باید $(x-1)^2$ باشد:

$$f(x) = \frac{ax + 3}{x^2 + bx + 1} = \frac{ax + 3}{(x-1)^2} \Rightarrow b = -2$$

ازطرفی تابع $f(x)$ پس از اینکه صورت و مخرج باهم ساده می‌شوند، باید به فرم $g(x) = \frac{c}{x-1}$ باشد:

$$f(x) = \frac{ax + 3}{(x-1)^2} = \frac{a \left(x + \frac{3}{a} \right)}{(x-1)^2} \Rightarrow x + \frac{3}{a} = x - 1 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{x-1}$$

بنابراین $c = -3$ است.

$$a + b + c = -3 + (-2) + (-3) = -8$$

جعبه ابزار: (x_0, y_0) مرکز تقارن تابع درجه سوم $f(x) = a(x - x_0)^3 + y_0$

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c \quad (*)$$

نقطه $(0, 1)$ روی تابع f قرار دارد، همچنین نقطه $(k, 5)$ مرکز تقارن تابع درجه سوم است، بنابراین داریم:

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$f(x) = p(x - k)^3 + 5$$

$$f(x) = p(x^3 - 3x^2k + 3xk^2 - k^3) + 5$$

$$= px^3 - 3pkx^2 + 3pk^2x - pk^3 + 5 = 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ -3kp = a \\ 3k^2p = b \\ -pk^3 + 5 = c \end{cases} \xrightarrow[c=1]{p=2} -2k^3 + 5 = 1 \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$$

$$a = -3kp = -6\sqrt[3]{2}$$

$$b = 3k^2p = 6\sqrt[3]{2}$$

$$f(\sqrt[3]{16}) = 2(\sqrt[3]{16})^3 + (-6\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16})^2 + (6\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16}) + 1$$

$$= 32 - 6 \times 8 + 6 \times 4 + 1 = 9$$

چالش سؤال: در نظر گرفتن ضریب x^3

در تابع خطی به صورت $y = mx + h$ محل تقاطع نمودار با محور y ها را نشان می‌دهد؛ به عبارت دیگر h عرض از مبدأ نمودار تابع خطی نامیده می‌شود.

قدر مطلقها را با بازه‌بندی حذف می‌کنیم:

$$x < -3 : f(x) = 3x + (x + 3) + (2 - 4x) = 5 \quad \text{ثابت}$$

$$-3 \leq x \leq \frac{1}{2} : f(x) = 3x - (x + 3) + (2 - 4x) = -2x - 1 \quad (\text{نزولی اکید})$$

$$x > \frac{1}{2} : f(x) = 3x - (x + 3) + (-2 + 4x) = 6x - 5 \quad (\text{صعودی اکید})$$

پس تابع در فاصله $[-3, \frac{1}{2}]$ مد نظر است. برد f در این فاصله را پیدا می‌کنیم که همان دامنه f^{-1} است:

$$-3 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 6 \geq -2x \geq -1 \Rightarrow 5 \geq -2x - 1 \geq -2 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [-2, 5]$$

حالا ضابطه تابع وارون را می‌نویسیم:

$$y = -2x - 1 \Rightarrow y + 1 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

پس $f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2}$ با شرط $x \in [-2, 5]$ است.

چون دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ باهم برابرند، پس به ازای هر x از دامنه‌ها باهم برابرند.

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 1 = 2 + 3 \Rightarrow a = 2$$

برای $x \neq 1$ هم بایستی $f(x) = g(x)$ باشد.

$$\frac{2x^2 + mx + n}{x - 1} = 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 + mx + n = 2x^2 + 3x - 2x - 3$$

$$\Rightarrow mx + n = x - 3 \Rightarrow m = 1, n = -3$$

$$\left[\frac{m + n + a}{2} \right] = \left[\frac{1 - 3 + 2}{2} \right] = \left[\frac{0}{2} \right] = 0$$

$$y = \frac{2^x}{1 + 2^x} \Rightarrow y(1 + 2^x) = 2^x \Rightarrow y + y2^x - 2^x = 0$$

$$\Rightarrow 2^x(y - 1) = -y \Rightarrow 2^x = \frac{-y}{y - 1} = \frac{y}{1 - y}$$

از طرفین عبارت فوق لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$2^x = \frac{y}{1 - y} \Rightarrow \log_2 2^x = \log_2 \left(\frac{y}{1 - y} \right) \Rightarrow x = \log_2 \left(\frac{y}{1 - y} \right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{x}{1 - x} \right)$$

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} \sqrt{x + x} = \sqrt{2x} & ; x > 0 \\ \sqrt{x - x} = 0 & ; x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

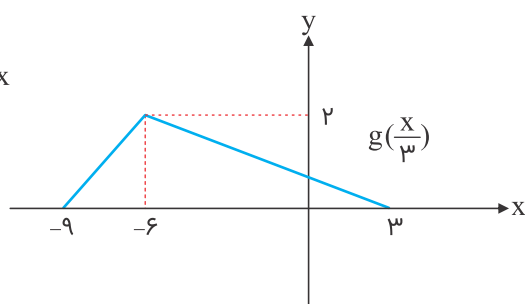
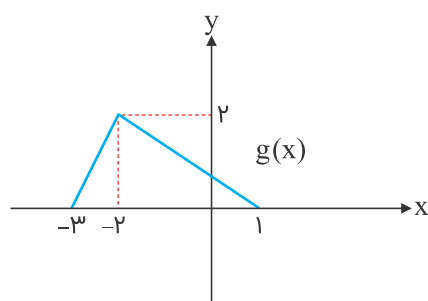
$$\Rightarrow D_g = [-3, 1]$$

باتوجه به اینکه برای رسم $g\left(\frac{x}{3}\right)$ باید نمودار تابع $y = g(x)$ را ۳ برابر در جهت محور x ها باز کنیم، پس دامنه $g\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر است

$$D = [-9, 3]$$

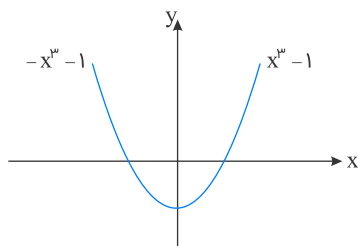
با: چون دامنه $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس دامنه $f\left(g\left(\frac{x}{3}\right)\right)$ با

دامنه $g\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر می‌شود.

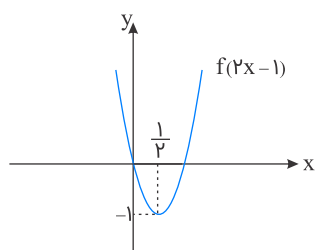
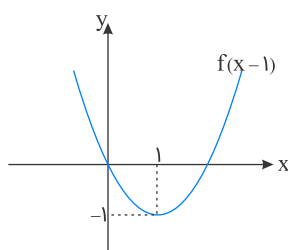


اول نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 |x| - 1 = \begin{cases} x^4 - 1 & ; x \geq 0 \\ -x^4 - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



مطابق شکل این تابع در فاصله $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. برای رسم $f(2x-1)$ اول $f(x-1)$ را رسم می‌کنیم و سپس طول نقاط نمودار f را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم.



اگر $x > 0$ باشد، $4 < x < 5$ باید باشد زیرا اگر $x \geq 5$ باشد $x[x] \geq 25$ و اگر $x \leq 4$ باشد، $x[x] \leq 16$ است. اگر $x \in (4, 5)$ باشد، $[x] = 4$ است. پس:

$$x[x] = 23 \xrightarrow{[x]=4} 4x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{4}$$

چون $\frac{23}{4} \notin (4, 5)$ است، پس به ازای $x > 0$ معادله جواب ندارد.

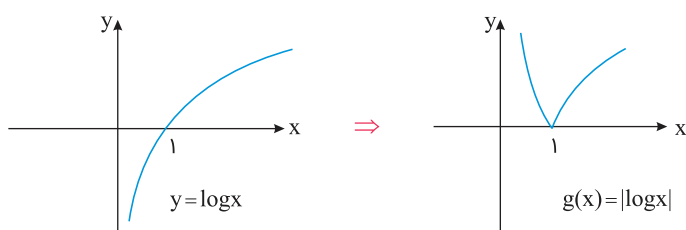
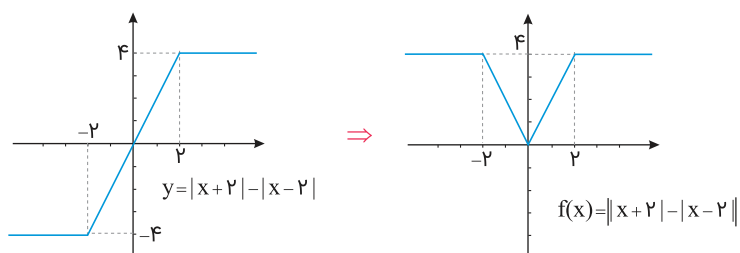
اگر $x < 0$ ، باید $-4 < x < -5$ باشد؛ زیرا اگر $-4 \leq x < 0$ باشد، $x[x] \leq 16$ و اگر $x \leq -5$ باشد، $x[x] \geq 25$ است. بنابراین داریم:

$$-5 < x < -4 \Rightarrow [x] = -5 \Rightarrow -5x = 23 \Rightarrow x = -\frac{23}{5} \in (-5, -4)$$

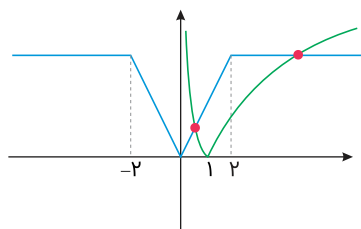
پس به ازای $x < 0$ معادله یک جواب دارد.

عددهای x ، x^3 و x^9 بین ۰ و ۱ هستند و x^6 بین ۰ و ۱ قرار دارد.
بنابراین:

$$[x] + [x^3] + [x^6] + [x^9] = -1 - 1 + 0 - 1 = -3$$



اگر دو تابع را در یک دستگاه رسم کنیم تعداد نقاط برخورد معلوم می‌شود.



دو تابع در دو نقطه مشترک‌اند.

رابطه f در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد یا به عبارت دیگر اگر هم زوج مرتبهایی با مؤلفه اول برابر وجود داشت، در این صورت می‌بایست مؤلفه دوم آن‌ها نیز برابر باشد.

$$(۳, ۴) = (۳, ۲kt)$$

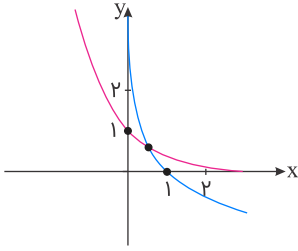
$$\Rightarrow ۲kt = ۴ \Rightarrow kt = ۲ \quad (۱) \xrightarrow{(۲, ۱) = (kt, k^۲ + t^۲)} k^۲ + t^۲ = ۱۲ \quad (۲)$$

حال باتوجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$(k - t)^۲ = k^۲ + t^۲ - ۲kt \Rightarrow (k - t)^۲ = ۱۲ - ۲ \times ۲ = ۸$$

$$\Rightarrow k - t = \pm\sqrt{۸} \xrightarrow{k > t} k - t = \sqrt{۸} \Rightarrow k - t = ۲\sqrt{۲}$$

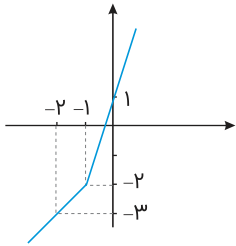
اول: اگر تابع نمایی $y = a^x$ و ارون خود را قطع کند آنگاه $0 < a < 1$ است. ضابطه و ارون این تابع $y = \log_a^x$ می‌باشد.



دوم: مطابق شکل هر دو تابع $y = a^x$ و $y = \log_a^x$ ($0 < a < 1$) نزولی هستند و طول و عرض نقطه برخورد در بازه $(0, 1)$ قرار دارد. این تابع و ارون خودش را روی خط $y = x$ قطع می‌کند.

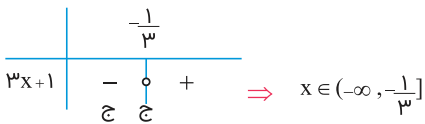
نکته: اگر f تابع اکیداً نزولی و g تابع اکیداً صعودی باشد، $f(g(x))$ تابعی اکیداً نزولی است. به طور کلی می‌توان برای توابع صعودی علامت $(+)$ و برای توابع نزولی علامت $(-)$ در نظر گرفت و با ضرب کردن علامت‌ها، صعودی یا نزولی بودن تابع مرکب را تعیین کرد.

$$f(x) = 2x + |x + 1| = \begin{cases} 3x + 1 & ; x \geq -1 \\ x - 1 & ; x < -1 \end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینیم شیب هردو ضابطه نمودار تابع f مثبت و در نتیجه اکیداً صعودی است. همچنین می‌دانیم تابع $g(x) = x^2$ به ازای $x \leq 0$ اکیداً نزولی است. بنابراین طبق نکته تابع $y = (2x + |x + 1|)^2$ به ازای x هایی که $0 \leq 2x + |x + 1|$ هستند، اکیداً نزولی خواهد بود.

$$2x + |x + 1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} & \text{ق ق} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 & \text{ق غ} \end{cases}$$



$$-3 \leq 3x - 2 < 2$$

$$-1 \leq 3x < 4 \Rightarrow \frac{-1}{3} \leq x < \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} y &= \log_2 \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{سه واحد به چپ}} y = \log_2 \sqrt{x+4} \\ &\xrightarrow{\text{دو واحد به پایین}} y = \log_2 \sqrt{x+4} - 2 \\ &\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y = -(\log_2 \sqrt{x+4} - 2) \\ &\Rightarrow y = -\log_2 \sqrt{x+4} + 2 \end{aligned}$$

هر عدد طبیعی در بازهٔ $(۱, ۵)$ را به ده برابر آن عدد به اضافه ۲ نسبت می‌دهد.

باتوجه به اینکه f تابعی خطی است، پس ضابطهٔ آن به صورت $f(x) = ax + b$ که $a, b \in \mathbb{R}$ و همچنین $D_f = \{۲, ۴, ۵\}$ است، پس:

$$\left. \begin{aligned} f(۲) &= ۵ \Rightarrow ۲a + b = ۵ \\ f(۴) &= m + ۲ \Rightarrow ۴a + b = m + ۲ \\ f(۵) &= ۲m \Rightarrow ۵a + b = ۲m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ۲a = m - ۳ \\ a = m - ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow m - ۳ = ۲m - ۴ \Rightarrow m = ۱$$

امتیاز وی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_n = ۳(n - ۱) + \left[\frac{n-1}{۷}\right] \times ۱۰$$

چون می‌خواهیم مقدار امتیاز شخص سه‌رقمی شود، داریم:

$$۳(n - ۱) + \left[\frac{n-1}{۷}\right] \times ۱۰ \geq ۱۰۰ \Rightarrow n_{\min} = ۲۵$$

ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$x + ۱ - \sqrt{x-۲} = y \xrightarrow{\text{مربع‌سازی}} \left(\sqrt{x-۲} - \frac{1}{۲}\right)^۲ + \frac{11}{۴} = y \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{x-۲} - \frac{1}{۲}\right)^۲ = y - \frac{11}{۴} \Rightarrow \sqrt{x-۲} - \frac{1}{۲} = \pm \sqrt{y - \frac{11}{۴}} \xrightarrow[\text{سمت چپ نامنفی است}]{x \geq \frac{11}{۴}}$$

$$\sqrt{x-۲} - \frac{1}{۲} = \sqrt{y - \frac{11}{۴}} \Rightarrow \sqrt{x-۲} = \frac{1}{۲} + \sqrt{y - \frac{11}{۴}}$$

$$\Rightarrow x - ۲ = \left(\sqrt{y - \frac{11}{۴}} + \frac{1}{۲}\right)^۲ \Rightarrow x = \left(\sqrt{y - \frac{11}{۴}} + \frac{1}{۲}\right)^۲ + ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{۴} \\ b = \frac{1}{۲} \\ c = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲a + b + c = \frac{11}{۲} + \frac{1}{۲} + ۲ = ۸$$

$$|f(f(x))| = f(۲x) \Rightarrow |x - ۶| = ۲x - ۳ \Rightarrow \begin{cases} x - ۶ = ۲x - ۳ \Rightarrow x = -۳ \\ x - ۶ = ۳ - ۲x \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

$x = -۳$ قابل قبول نیست و فقط $x = ۳$ جواب معادله است.

$$\frac{1}{x} \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow D_1 = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$\frac{x+1}{x - \frac{1}{x}} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow D_۲ = \mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_۲ = \mathbb{R} - \{-۱, ۰, ۱\}$$

نکته: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای معکوس‌پذیر از درجه $n \in \mathbb{N}$ باشد، $f^{-1}(x)$ تابعی از درجه $\frac{1}{n}$ خواهد بود.

در این تست از آنجایی که $y = f(x) + f^{-1}(x)$ تابعی خطی و از درجه اول است، نتیجه می‌گیریم که $n = 1$ بوده است؛ یعنی خود f تابعی درجه اول است:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow f(x) + f^{-1}(x) = ax + b + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = x \left(a + \frac{1}{a} \right) + b - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x \left(a + \frac{1}{a} \right) + \left(b - \frac{b}{a} \right) = -2x + 4$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} = -2, \quad b \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 4$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b \left(1 - \frac{1}{-1} \right) = 4$$

$$\Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x + 2, \quad f^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(6) + f(4) = (-6 + 2) + (-4 + 2) = -6$$

چون دامنه تابع $\mathbb{R} - \{a, b\}$ است، پس a و b ریشه‌های مخرج می‌باشند.

$$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

پس a و b برابر ۲ و -۱ و در نتیجه $(a-b)^2$ برابر ۹ است.

در سهمی اگر ضریب x^2 مثبت باشد، برد سهمی، بازه $\left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty \right)$ است.

اگر یک عدد از دامنه حذف شود، برد تغییری نمی‌کند، مگر آن عدد طول رأس سهمی باشد. پس $x = 1$ طول رأس سهمی است:

$$\frac{-b}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{-b}{2} = 1 \Rightarrow b = -2$$

از طرفی عدد c همان y رأس سهمی است:

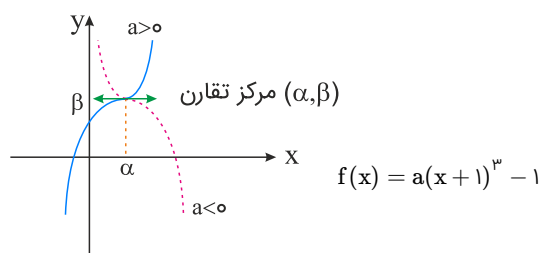
$$f(x) = x^2 - 2x + 2c \xrightarrow{f(1)=c} 1 - 2 + 2c = c \Rightarrow c = 1$$

در نتیجه: $b + c = -2 + 1 = -1$.

برای نوشتن ضابطه تابع درجه سوم که نمودار آن به صورت زیر بوده و مرکز تقارنش نقطه (α, β) باشد، کافی است از ضابطه $f(x) = a(x - \alpha)^3 + \beta$ استفاده نماییم. حال با داشتن یک نقطه دیگر از این تابع و جایگذاری آن در تابع f ، به راحتی مقدار a به دست می‌آید.

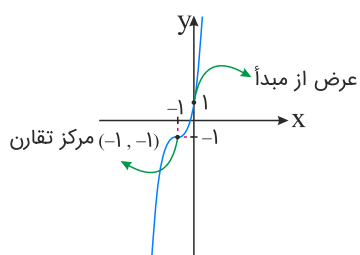
داریم:

$$\Rightarrow f(x) = a(x - \alpha)^3 + \beta$$



چون در شکل داده شده مرکز تقارن نقطه $(-1, -1)$ است، پس داریم:

حال کافی است نقطه عرض از مبدأ تابع f را در آن صدق دهیم تا a مشخص شده. داریم:



$$\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}} \frac{a(1)^3 - 1 = 1 \Rightarrow a = 2}{\text{را در } f \text{ صدق می‌دهیم}}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x + 1)^3 - 1 = 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 1$$

در آخر مقادیر a, b, c, d را نظیر به نظیر برابر با ضرایب جملات x^3, x^2, x و عدد ثابت تابع به دست آمده قرار می‌دهیم. داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 6 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow abcd = 2 \times 6 \times 6 \times 1 = 72$$

ابتدا دقت کنید که:

$$f(2x - 3) = 2x - 3 - [2x - 3] = 2x - 3 - [2x] + 3 = 2x - [2x]$$

پس:

$$g(x) = f(2x - 3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x]$$

حال فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر $k + \frac{1}{2} \leq x < k + 1$, آنگاه:

$$[x] = k$$

$$2k \leq 2x < 2k + 1 \Rightarrow [2x] = 2k$$

بنابراین:

$$g(x) = 2k - 2k = 0$$

اگر $k + \frac{1}{2} \leq x < k + 1$, آنگاه:

$$[x] = k$$

$$2k + 1 \leq 2x < 2k + 2 \Rightarrow [2x] = 2k + 1$$

بنابراین:

$$g(x) = 2k - 2k - 1 = -1$$

در نتیجه:

$$R_g = \{-1, 0\}$$

ابتدا نامعادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{4x^2 + 5x + 1}{|x - 2|(x^2 + 2x + 1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 5x + 1}{|x - 2|(x + 1)^2} \leq 0$$

عبارت‌های $|x - 2|$ و $(x + 1)^2$ عبارت‌هایی همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند و به شرط توجه به ریشه‌های آن‌ها ($x = -1, 2$)، می‌توان آن‌ها را در تعیین علامت نادیده گرفت. پس داریم:

$$4x^2 + 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow (x + 1)\left(x + \frac{1}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{x \neq -1, 2} -1 < x \leq -\frac{1}{4}$$

حال به سراغ عبارت $[x + 1] + \frac{x}{|4x|}$ می‌رویم. اول تکلیف جزء صحیح و سپس تکلیف قدر مطلق را معلوم می‌کنیم:

$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین را با یک}} 0 < x + 1 \leq \frac{3}{4} \Rightarrow [x + 1] = 0$$

$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در چهار}} -4 < 4x \leq -1 \Rightarrow |4x| = -4x$$

پس داریم:

$$[x + 1] + \frac{x}{|4x|} = 0 + \frac{x}{-4x} = -\frac{1}{4}$$