

گزینه ۲

۱

نکته: اگر A یک مجموعه m عضوی و B یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد توابع قابل تعریف از A به B برابر n^m می‌باشد. باتوجه به این نکته تعداد توابعی که از B به A می‌توان تعریف کرد $3^4 = 81$ است.

گزینه ۲

۲

مجموعه حروف کلمه موردنظر یکی از حالات زیر می‌تواند باشد:

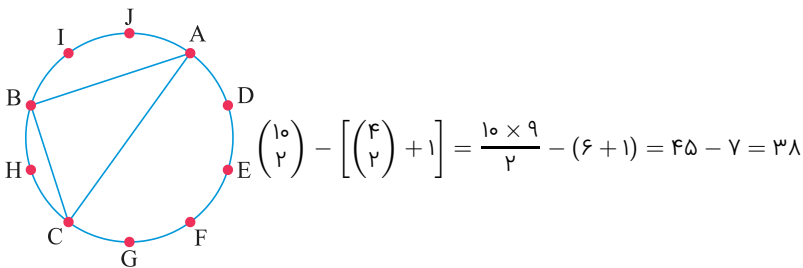
- ۱) e, e, d, d ۲) e, e, d, c ۳) e, d, d, d
۴) e, d, d, c ۵) d, d, d, c

در هر یک از حالات فوق تعداد کلمات ساخته شده به ترتیب برابر با ۶, ۱۲, ۴, ۱۲, ۴ است که در مجموع می‌شود ۳۸.

گزینه ۳

۳

تمام پاره‌خطها از انتخاب ۲ نقطه از میان ۱۰ نقطه مذکور پذیرفته‌اند، به جز آن‌هایی که از ۴ نقطه E, D, F و G انتخاب می‌شوند به علاوه پاره‌خط IJ :



گزینه ۱

۴

رنگ ساعت انتخاب شده است. پس تنها ۱ حالت برای رنگ ساعت خواهیم داشت. بنابراین داریم:

$$\underbrace{5}_{\text{سایز}} \times \underbrace{1}_{\text{رنگ}} \times \underbrace{4}_{\text{مدل}} = 20$$

در نتیجه گزینه "۱" صحیح است.

گزینه ۲

۵

در شرایط سؤال متوجه می‌شویم که الف) اعضای ۸ و ۷ نباید انتخاب شوند. ب) ۶ حتماً حضور داشته باشد.

پس از ۴ انتخاب، ۳ انتخاب باقی ماند که از میان ۵ تا ۱ باید انتخاب شوند:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$$

کل اعداد سه رقمی ۹۰۰ تا هستند.

$$\frac{9}{9!} \times \frac{10}{9!} \times \frac{10}{9!} = 900$$

حال ما به دنبال اعداد سه رقمی هستیم که رقم تکراری دارند. بهتر است تعداد آن‌هایی که رقم تکراری ندارند، بشماریم:

$$\frac{9}{9!} \times \frac{9}{9!} \times \frac{8}{9!} = 648$$

۹ تا ۹ به جز رقم صدها ۹ تا ۹ به جز رقم صدگان ۸ تا ۹ به جز رقم قبلی

پس از کل ۹۰۰ تا عدد سه رقمی در ۶۴۸ تا آن‌ها همه ارقام متمایزند و در $900 - 648 = 252$ عدد دیگر، رقم تکراری داریم.

چون میز نقطه آغاز ندارد، نفر اول هر جا که بخواهد می‌نشیند. حال صندلی دوم به ۶ حالت پر می‌شود (چون همسر نفر اول نمی‌تواند در صندلی دوم قرار گیرد) صندلی سوم به ۴ حالت پر می‌شود (چون همسر نفرات اول و دوم نمی‌توانند آنجا بنشینند) همچنین صندلی چهارم به ۲ حالت و در نهایت صندلی‌های پنجم تا هشتم هر کدام فقط یک حالت دارند. بنابراین پاسخ مسئله طبق اصل ضرب برابر است با:

$$6 \times 4 \times 2 = 48$$

با وصل کردن دوه‌دو این نقاط، وتر ایجاد می‌شود؛ پس برای رسم هر وتر به دو نقطه احتیاج داریم. بنابراین برای تعداد وترها باید تعداد انتخاب‌های دو نقطه از ۷ نقطه موجود روی دایره را بیابیم:

$$\binom{7}{2} = 21$$

(۱) حالت اول این است که $x = 30$ و $y = 29$ باشد. در این صورت:

$$\frac{x!}{y!} = \frac{30!}{29!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 29 \times 30}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 29} = 30$$

$$x + y = 30 + 29 = 59$$

(۲) حالت دوم این است که $x = 6$ و $y = 4$ باشد، پس:

$$\frac{x!}{y!} = \frac{6!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5 \times 6 = 30$$

$$x + y = 6 + 4 = 10$$

دخترها به ۶! حالت در صف قرار می‌گیرند. ترتیب در قرارگیری پسرها میان دخترها اهمیت دارد. در نتیجه تعداد حالات برابر است با:

$$6! \times 3! = 6! \times \frac{7!}{3!4!} \times 3! = 30 \times 7!$$

$$6! \times \binom{7}{3} \times 3! = 6! \times \frac{7!}{3!4!} \times 3! = 30 \times 7!$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 60 \times \frac{(n-2)!}{(n-4)! \times 2!} \Rightarrow n! = 30(n-2)!$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)! = 30(n-2)! \Rightarrow n(n-1) = 30$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -5 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

حروف e, e و r, r حروف یکسان هستند؛ بنابراین ۲ حرف r و ۲ حرف e را هرکدام جداگانه در یک بسته در نظر می‌گیریم. در کل ۸ حرف داریم r, r, e, e, a, b, h, o, n, c که به ۸! طریق جایگشت می‌کنند. توجه کنید حروف e, e, r, r نمی‌توانند باهم در بسته‌هایشان جایگشت داشته باشند؛ زیرا حالت جدیدی ایجاد نمی‌شود.

با استفاده از اصل متمم داریم:

$$((\text{تعداد کلمات ۴ حرفی بدون حروف تکراری}) - (\text{تعداد کل کلمات})) = (\text{تعداد کلمات ۴ حرفی با حروف تکراری})$$

$$= 4 \times 4 \times 4 \times 4 - 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 232$$

نکته: اگر داشته باشیم $\left(\frac{n}{x}\right) = \left(\frac{n}{y}\right)$ ، آنگاه دو حالت داریم:

$$\begin{cases} (1) \ x = y \\ \text{یا} \\ (2) \ x + y = n \end{cases}$$

پس:

$$(1) : 2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(2) : 2x - 1 + x^2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \text{ غ. ق. ق}$$

توجه داشته باشید به ازای $x = -3$ خواهیم داشت $\left(\frac{2}{-3}\right) - 1$ یعنی $\left(\frac{2}{-3}\right) - 1$ که تعریف نشده است.

برای اینکه حروف "e" و "a" کنار هم باشند، آن‌ها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. به‌جز این بسته چهار حرف دیگر خواهیم داشت. در کل ۵! جایگشت کلی و داخل بسته نیز ۲! جابه‌جایی داریم. بنابراین $2! \times 5! = 240$ حالت داریم.

نکته: حرف "y" را در حالت کلی نمی‌توان جزو حروف صدا دار در نظر گرفت. باتوجه به تلفظ حرف در کلمه، صدا دار یا بی‌صدا بودن تعیین می‌شود.

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

تمام اعدادی که با ۱ شروع می‌شوند از عدد گفته‌شده کوچکتر هستند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$1 \times 5! = 120$$

تمام اعدادی که با ۲ شروع می‌شوند هم از عدد ما کوچکتر هستند. تعداد آن‌ها نیز برابر است با:

$$1 \times 5! = 120$$

عدد ۳۱۲۴۵۶ هم از عدد ما کوچکتر است. پس در کل $120 + 120 + 1 = 241$ عدد داریم که از عدد ۳۱۲۴۶۵ کوچکتر هستند و این عدد، عدد ۲۴۲ام خواهد بود.

این شخص، هم می‌تواند کتاب رمان انتخاب کند و هم کتاب روان‌شناسی (به‌طور هم‌زمان)، بنابراین از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری‌که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیش از دو مرحله است.)

دسته اول: اعدادی که رقم صدگان آن‌ها ۶ یا بزرگتر باشد. در این حالت رقم صدگان ۴ حالت، رقم دهگان ۹ حالت و رقم یکان ۸ حالت خواهد داشت و داریم:

$$4 \times 9 \times 8 = 288$$

دسته دوم: اعدادی که رقم صدگان آن‌ها ۵ و رقم دهگان آن‌ها ۲ یا بزرگتر باشد. در این حالت رقم صدگان یک حالت، رقم دهگان ۷ حالت و رقم یکان ۸ حالت دارد و داریم:

$$1 \times 7 \times 8 = 56$$

دسته سوم: اعدادی که رقم صدگان و دهگان آن‌ها به ترتیب برابر ۵ و ۱ و رقم یکان آن‌ها بزرگتر از ۴ باشد. در این حالت، رقم صدگان یک حالت، رقم دهگان یک حالت و رقم یکان ۴ حالت دارد و داریم:

$$1 \times 1 \times 4 = 4$$

جمع کل حالات:

$$288 + 56 + 4 = 348$$

"ام ی ر ک ب ی ر"

باید "ر" ها کنار هم و "ی" ها کنار هم باشند:

یک شی یک شی

$$6! = \text{تعداد کلمات مطلوب} \Rightarrow \text{ام ک ب} \underbrace{\text{ر}}_{\text{ی}} \underbrace{\text{ی}}_{\text{ر}} = 6!$$

چون ۲ شغل برای ۲ شخص متمایز انتخاب می‌شود، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است.

$$P(6, 2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$$

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{انتخاب ۳ ردیف}} \times \underbrace{\binom{5}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{5}{1}}_{\text{از هر ردیف یک نفر انتخاب می‌کنیم}} = 20 \times 5^3 = 2500$$

۲۳

گزینه ۱

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = 126 + 126 + 84 = 336$$

۲۴

گزینه ۳

گروه‌های پنج‌نفره شامل کارمند A و فاقد کارمندی‌های B و C هستند و حداقل دو کارگر در آن‌ها حضور دارند. در نتیجه:

$$\binom{3}{2} \binom{1}{1} \binom{5}{2} + \binom{3}{3} \binom{1}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 10 + 1 \times 5 = 35$$

$\binom{3}{2}$ انتخاب ۲ نفر از کارگرها
 $\binom{1}{1}$ انتخاب ۱ نفر از بقیه افراد
 $\binom{5}{2}$ انتخاب ۲ نفر از کارگرها
 $\binom{3}{3}$ انتخاب ۳ نفر از کارگرها
 $\binom{1}{1}$ انتخاب ۱ نفر از بقیه افراد

۲۵

گزینه ۲

حالت اول: رقم سمت چپ ۸ باشد:

$$\frac{1}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{105}$$

حالت دوم: رقم سمت چپ ۷ و رقم صدگان بزرگتر از ۳ باشد:

$$\frac{1}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{350}$$

حالت سوم: اعداد بین ۷۲۵۰ تا ۷۳۰۰: که بهتر است به شکل عادی شمرده شوند: ۷۲۸۵، ۷۲۵۸، ۷۲۵۱ و ۷۲۸۱ پس در کل داریم:

$$24 + 12 + 4 = 40$$

۲۶

گزینه ۱

الف) می‌دانیم اعدادی مضرب ۵ هستند که رقم یکان آن‌ها صفر یا ۵ باشد.

$$- \times - \times \frac{2}{5,0}$$

ب) می‌دانیم که رقم صدگان عدد موردنظر نباید صفر باشد و باتوجه به مجاز بودن تکرار ارقام، همه ارقام به جز صفر می‌توانند در جایگاه صدگان قرار گیرند.

$$\frac{5}{8,7,5,3,2} \times - \times \frac{2}{-}$$

پ) چون تکرار ارقام جایز است، همه ارقام می‌توانند در جایگاه دهگان قرار گیرند.

$$\frac{5}{-} \times \frac{6}{-} \times \frac{2}{-} \Rightarrow 5 \times 6 \times 2 = 60$$

۲۷

گزینه ۴

از میان ۶ زوج، ۲ زوج را برای حضور در مجموعه ۷ نفره انتخاب می‌کنیم که به $\binom{6}{2}$ حالت امکان‌پذیر است. از میان ۸ نفر باقی‌مانده باید ۳ نفر را انتخاب کنیم به طوری که هیچ کدام باهم زن و شوهر نباشند. پس ۳ زوج را انتخاب و از هر کدام یک نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 15 \times 4 \times 8 = 480$$

اول تعداد کل اعداد چهار رقمی زوج را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{5}{4} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = 60 \quad \text{یکان صفر باشد}$$

$$\frac{4}{4} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = 96 \quad \text{یکان ۲, ۴ باشد}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد کل}} 60 + 96 = 156$$

حالا تعداد اعداد چهار رقمی زوجی که شامل عدد ۲ نیست را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 24 \quad \text{یکان صفر باشد}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 18 \quad \text{یکان ۴ باشد}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد کل}} 24 + 18 = 42$$

$$156 - 42 = 114 \quad \text{تعداد حالت‌های مطلوب}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{20} \Rightarrow n(n+1) = 20 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow n! = 4! = 24$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20 \quad \text{پر کردن نیمکت ۳ نفره: ۲۰}$$

$$\binom{3}{2} = 3 \quad \text{پر کردن نیمکت ۲ نفره از بین ۳ دانش‌آموز باقی‌مانده: ۳}$$

$$\binom{1}{1} = 1 \quad \text{پر کردن نیمکت ۱ نفره با ۱ دانش‌آموز باقی‌مانده: ۱}$$

$$20 \times 3 \times 1 = 60 \quad \text{پس تعداد کل حالات برابر است با: ۶۰}$$